研究生入学考试辅导
本科生过关测试必备
高等院校教材同步辅导

http://www.phei.com.cn



理论概要
例题详解
习题自测
考研真题

材料力学

考研辅导

海　欣　主编
温　正　唐家鹏　编著



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

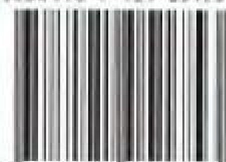
上架建议：考研辅导/材料力学
咨询投稿电话：(010) 88254010
电子信箱：gp@phei.com.cn



责任编辑：范子瑜　钟永刚
封面设计：孙焱津



ISBN 978-7-121-05175-3



定价：32.00 元

材料力学考研辅导

海　欣　主编
温　正　唐家鹏　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

材料力学是高等院校开设的专业基础课程，同时也是全国高校相关专业的硕士入学考试必考课程。为了帮助广大的考研学生进行系统复习，根据国家教育部颁布的高等工科院校《材料力学课程教学基本要求》编写了本书。

全书共分为 13 章，每一章均由知识要点、本章内容总结、典型题分析、习题四部分组成。本书首先通过知识要点和内容总结对本章内容做了高度概括和叙述。典型例题解析中例题大都选自国内重点高校和科研院所历年考研真题，并做了详细分析和解答。习题均有参考答案，可通过练习以检测学习效果，进一步提高解题能力。本书最后还给出了各大高校的硕士研究生入学考试试题，并给出了部分答案，其余答案可以到 www.haixin.org 上求助。

本书可作为相关专业学生报考硕士学位研究生学习用参考书及复习指导书，也适合于高等院校相关专业的学生自学使用，同时可作为高等院校青年教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学考研辅导 / 海欣主编. —北京：电子工业出版社，2008.1
ISBN 978-7-121-05175-3

I. 材… II. 海… III. 材料力学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 157262 号

策划编辑：高 平
责任编辑：范子瑜 钟永刚 特约编辑：吕亚增
印 刷：北京天宇星印刷厂
装 订：涿州市桃园装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本：787×1092 1/16 印张：19.75 字数：506 千字
印 次：2008 年 1 月第 1 次印刷
印 数：5000 册 定价：32.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

举报电话：（010）88254396；（010）88258888

传　　真：（010）88254397

E-mail：　dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

　　　　　电子工业出版社总编办公室

邮　　编：100036

前　言

材料力学是高等院校相关专业开设的技术基础课程，它是所有相关后续专业课程的基础，同时也是全国高校相关专业硕士研究生入学考试课程。为了帮助广大的考研学生学习和提高，特别是进行系统复习，我们根据国家教育部（原国家教委）颁布的高等工科院校《材料力学课程教学基本要求》编写了本书。

由于高校众多，水平不同，要在有限的篇幅内完成对各类专业课程有针对性的指导是相当困难的。为了解决这方面的问题，我们经过反复讨论，并征求了大量一线教师的意见，将一些通用原则和方法的指导放在首位，并结合大量相关实例进行了讲解。

本书共分 13 章，附录提供了部分高校的近几年真题，并对部分真题进行了较为详细的讲解，其他真题及复习过程遇到的问题可到“海欣考研论坛”（www.haixin.org）进行求助下载。对于全书而言，每章内容包括：

（1）知识要点。对于每章的重要知识，尤其是在历年真题中经常出现的重要考点做了总结和提示，读者可以根据提示对本章内容在复习时有个侧重点。

（2）本章内容总结。结合知识要点提示，再对每一章的知识要点进行详细地讲解，使得读者可以快速地把握知识要点，更加快速地提高复习效率。在总结部分还添加了一些解题技巧，更加有利于读者复习。

（3）典型例题解析。在该部分我们针对典型考研真题分析中提出的相应考点帮助读者筛选出相关真题，结合高校材料力学历年考研真题进行全面地讲解，并在最后给出规律性的总结，更加方便读者去把提考点，更好地应对考研，成为考研必不可少的一本书。

（4）习题。在每一章节的后面给出了部分自我测试题，并在本书后面附有参考答案，读者可通过练习以检测学习效果，进一步提高解题能力。

（5）在本书的最后附了部分高校最新材料力学硕士研究生入学考试真题，对于报考硕士研究生的考生来说，这无疑是最宝贵的资源。

材料力学考题的具体类型并不是很多，因此在选择例题和习题的过程中，我们主要针对典型题型和一些具有代表性的真题进行了总结，并选择了一些高等工科院校的最新试题。目的是使读者了解和掌握不同类型题目的解题方法和技巧，以便扩大解题思路，培养分析和解决实际问题的能力。

本书力求科学性、先进性、指导性，既能促进高等工科类院校学生的材料力学学习，又不脱离大多数一般院校的实际，提供切实可行的参考实例。本书可作为相关专业学生报考硕士学位研究生学习用参考书及复习指导书，也适合于高等院校相关专业的学生自学使用，同时可作为高等院校青年教师的教学参考书。

在收集和整理往年考研真题和笔记的过程中，得到了清华大学、上海交通大学、东南大学、同济大学、西安交通大学、西北工业大学、浙江大学、北京航空航天大学、哈尔滨工业大学、天津大学、中国科学技术大学、华中科技大学、华南理工大学、中科院等高校和科研院所的老师及研究生的热情帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

本书由海欣主编，温正、唐家鹏编著，另外魏新、夏金玉、丁金滨、王伟、吴晖、刘志

明、何嘉扬、张杰、刘正华等也参与了部分编写工作。书中错误在所难免，恳请广大读者朋友批评指正。同时在校一线授课老师对该书进行了认真仔细的审阅，并提出了许多极为宝贵的修改意见，对提高本书质量起了很大的作用，对此致以衷心的感谢！

由于作者水平有限，编写时间较短，书中欠妥错误之处在所难免，希望读者和同仁能够及时指出，共同促进本书质量的提高。

用户在使用本书时，出现相关疑问以及碰到难以解答的题目，可到为本书专门提供的“海欣考研论坛”中提问，编者会尽快给予解答，另外该论坛还提供了部分真题及答案，读者可以到相关栏目下载。论坛网址为：www.haixin.org/kybbs。

编　者

2007年6月于北京

目　录

第1章 绪 论

知识要点

材料力学所研究的是构件在外力作用下受力、变形和破坏的规律，为工程结构的合理设计提供有关强度、刚度和稳定性分析的基本理论和方法。

本章主要简单介绍材料力学研究的基本假设及基本概念。

第一节 本章内容总结

1. 基本假设

(1)连续性假设：无空隙，力学量是坐标的连续函数。

(2)均匀性假设：各点具有相同的力学性能。

(3)各向同性假设：沿各方向力学性能相同。

2. 外力与内力

(1)外力：其他物体或构件作用在该物体上的力，包括载荷与约束反力；

(2)内力：由外力作用而引起的物体两部分之间的相互作用力。

(3)截面法：由假想截面将杆件截开，即解除内部约束，相应内力得以显露。内力通常是分布力，内力的合力亦简称内力，即内力常指内力的合力。

3. 正应力与剪应力

应力 $p=\lim\limits_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}$，类似于压强作用于表面。总应力 p 的法向分量 σ 称为正应力；切向分量 τ 称为剪应力。

$$p^2=\sigma^2+\tau^2$$

单位：$1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$，$1\text{MPa}=10^6\text{N/m}^2=1\text{N/mm}^2$

4. 剪应力互等定理

剪应力互等定理：在微体的互垂截面上，垂直于截面交线的剪应力数值相等，而方向则指向或离开该交线，即

$$\tau=\tau'$$

5. 应变

正应变：$\varepsilon = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}$

剪应变：γ（弧度）；小变形时 $\gamma = \tan\gamma$

6. 胡克定律

由杆单向受力试验可知，$\sigma \propto \varepsilon$，引入比例系数 E，于是得 $\sigma = E\varepsilon$（胡克定律，E：弹性模量）。

根据纯剪试验可知，$\tau = G\gamma$（剪切胡克定律，G：切变模量或剪切弹性模量）。

E，G 单位通常为 GPa，$1GPa = 10^3 MPa = 10^9 Pa$

7. 截面的几何性质

(1)静矩与形心

静矩：平面图形面积对某坐标轴的一次矩。定义静矩为：

$$S_z = \int_A y dA \qquad S_y = \int_A z dA$$

形心即几何中心，对于均质薄板，均质薄板的重心与平面图形的形心有相同的坐标 z_C 和 y_C，则薄板重心的坐标为：

$$y_C = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{S_z}{A}, \quad z_C = \frac{\int_A z dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

所以形心坐标为：$z_C = \frac{S_y}{A}$，$y_C = \frac{S_z}{A}$

(2)极惯性矩

$I_p = \int_A \rho^2 dA$，表示平面图形对某坐标轴的二次矩。

(3)轴惯性矩

$I_z = \int_A y^2 dA$，$I_y = \int_A z^2 dA$，分别称为对 z 轴与 y 轴的惯性矩

(4)惯性积

定义 $I_{yz} = \int_A yz dA$ 为图形对一对正交轴 y、z 轴的惯性积。若 y、z 轴中有一根为对称轴则其惯性积为零。

(5)惯性矩的平行轴定理：

$$I_z = I_{z_0} + Aa^2$$

即截面对于任一轴 z 的惯性矩，等于对其平行形心轴 z_0 的惯性矩加上截面面积与两轴间距离平方之乘积。

同理有 $I_y = I_{y_0} + Ab^2$，式中，y_0 轴为形心轴，y 轴与 y_0 轴平行，相距为 b。

第二节　典型题分析

【例 1】 在边长为 $2a$ 的正方形图形中挖去一个边长为 a 的正方形，如图 1-1 所示。试求该图形对 z 轴和 z_1 轴的惯性矩 I_z、I_{z_1} 以及对 y、z_1 轴的惯性积 I_{yz_1}。（东南大学，1998 年）

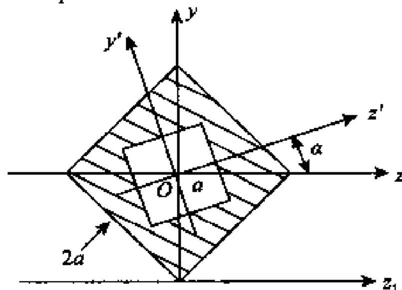


图 1-1

解 首先求大正方形对 z 轴和 y 轴的惯性矩。正方形对过形心平行于边的直线的惯性矩都为：$I=(2a)^4/12=4a^4/3$

由于大正方形对 y 轴和 z 轴的惯性矩相等，于是，对 y 轴和 z 轴的惯性矩为

$$I_y^{(2a)} = I_z^{(2a)} = \frac{4}{3}a^4$$

由于大正方形关于 y 轴和 z 轴对称，惯性积 $I_{yz}=0$；小正方形对 y' 轴和 z' 轴的惯性矩为：$I_{y'}=I_{z'}=a^4/12$

惯性积：$I_{y'z'}=0$

由转轴公式得小正方形对 y 轴和 z 轴的惯性矩与惯性积分别为：

$$I_y^{(a)} = I_z^{(a)} = a^4/12, I_{yz}^{(a)} = 0$$

由转轴公式可知，当惯性积为零，且对两轴的惯性矩相等时，过这点的任意两条相互垂直的轴，都是主惯性轴。

因此，所求图形对 z 轴的惯性矩 I_z 和对 yz 轴的惯性积 I_{yz} 分别为：

$$I_z = I_z^{(2a)} - I_z^{(a)} = \frac{4a^4}{3} - \frac{a^4}{12} = \frac{5}{4}a^4, I_{yz} = 0$$

所求图形面积 $A=(2a)^2-a^2=3a^2$，则由轴平移关系得所求图形对 z_1 轴的惯性矩 I_{z_1} 和对 yz_1 轴的惯性积 I_{yz_1} 分别为：

$$I_{z_1} = I_z + (\sqrt{2}a)^2 \cdot 3a^2 = \cdots\cdots, I_{yz_1}=0$$

【例 2】 在矩形面中挖去一个直径为 a 的圆形（图 1-2），则该图形对 z 轴的惯性矩 $I_z=$ ________。（东南大学，1999 年）

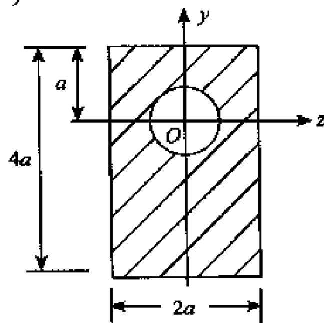


图 1-2

解 采用组合面积方法求惯性矩,计算流程如图 1-3 所示。

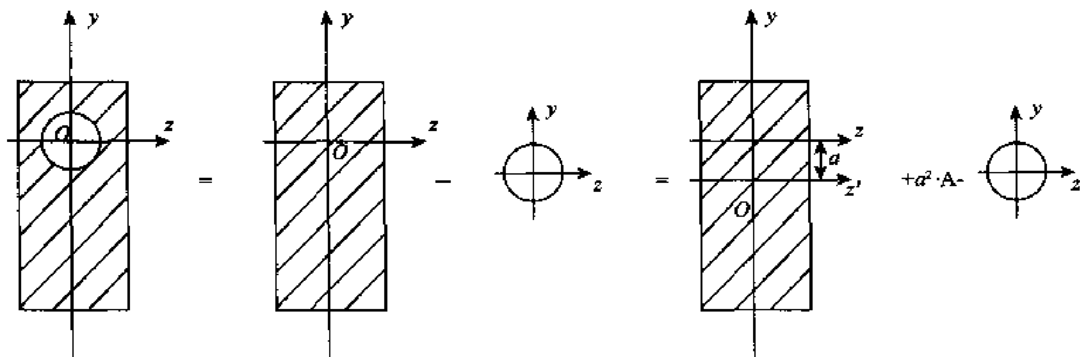


图 1-3

首先,分解成矩形和圆形,然后矩形进行平移,计算时,从后往前。矩形和圆形对形心惯性轴的惯性矩分别为:

$$I_{矩}=\frac{bh^3}{12}=\frac{2a(4a)^3}{12}=\frac{32a^4}{3}$$

$$I_{圆}=\frac{\pi a^4}{64}$$

将矩形的形心向上移动 a,其对 z 轴的惯性矩为:

$$I_z=I_{矩}+a^2\cdot 2a\cdot 4a=18\frac{2}{3}a^4$$

再将平移后的矩形挖去圆形面积所产生的惯性矩,得该图形对 z 轴的惯性矩:

$$I_z=I-I_{圆}=18\frac{2}{3}a^4-\frac{\pi}{64}a^4=\left(\frac{56}{3}-\frac{\pi}{64}\right)a^4$$

第三节 习 题

一、简答题

1."材料力学"课程主要研究什么?(长安大学,2001 年)

二、填空题

1. 材料力学中,对变形面体做了________、________、________的三个基本假设________。(国防科技大学,2004 年)

2. 材料在使用过程中提出三个方面的性能要求,即________、________、________。

三、选择题

1. 在下列各工程材料中,________不可应用各向同性假设。(北京航空航天大学,2003 年)

A. 铸铁　　B. 玻璃　　C. 松木　　D. 铸铜

2. 根据小变形条件,可以认为________。

A. 构件不变形　　B. 构件变形

C. 构件仅发生弹性变形　　D. 构件的变形远小于其原始尺寸

第2章　轴向拉压与剪切

知识要点

本章主要介绍了轴向拉压杆的应力与变形的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)轴向拉伸或压缩时横截面上的内力和应力；

(2)直杆轴向拉伸或压缩时斜截面上的应力；

(3)材料在拉伸时的力学性能以及材料在压缩时的力学性能；

(4)温度和时间对材料力学性能的影响；

(5)失效、安全系数和强度计算；

(6)轴向拉伸或压缩时的变形及变形能；

(7)拉伸、压缩静不定问题；

(8)温度应力和装配应力；

(9)剪切和挤压的实用计算。

第一节　本章内容总结

1. 轴向拉压杆的内力

直杆所受外力或其合力与杆轴线重合，沿轴线方向将发生伸长或缩短变形，称这种变形为轴向拉伸或压缩，简称轴向拉压。正的轴力力矢背向截面，使杆件拉伸；负的轴力力矢指向截面，使杆件压缩。

2. 轴向拉压杆的应力

内力：在轴向载荷 P 作用下，杆件横截面上的唯一内力分量为轴力 N，它们在该截面的两部分的大小相等、方向相反。规定拉力为正，压力为负。

正应力在截面上均匀分布，即：$\sigma_x = N/A$

其中 N 为轴力，A 为杆的横截面积，轴力 N 为正使时，σ_x 为正值，是拉应力；反之为压应力。

轴力图：轴力沿杆轴变化的图。采用设正法画法。(即将未知扭矩假定为正向)

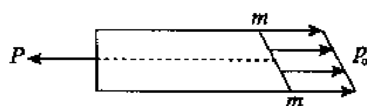
3. 圣维南原理应力集中

由于在杆端外力作用的方式不同，将会对杆端附近处各截面的应力分布产生影响(应力非均匀分布)，而对远离杆端的各个截面，影响甚小或根本没有影响。这一规律称为圣维南(Saint-Venant)原理。

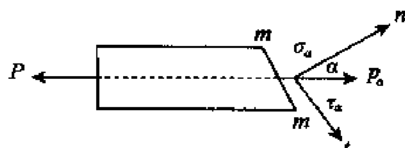
工程实际中，由于结构或功能上的需要，构件常制成阶梯形状、带有圆孔或切槽等，使构件截面尺寸或形状发生突变。较精确的理论分析和实验表明，在外力作用下，弹性体形状或截面尺寸发生突变的局部区域应力急剧增大，这种现象称为应力集中。

4. 拉压杆斜截面上的应力

利用截面法分析拉压杆横截面上的应力，如图 2-1(a)所示，沿任一斜截面 $m-m$ 将杆切开，其横截面上的应力均匀分布。



(a)应力分布图



(b)应力沿截面法向与切向分解

图 2-1

如图 2-1(b)所示，由于 $p_\alpha \cdot \dfrac{A}{\cos\alpha} - P = 0$，故而：

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha \cos\alpha}{A} = \sigma\cos\alpha$$

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha ; \tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$$

$$\sigma_{max} = \sigma(\alpha = 0°), \tau_{max} = \frac{\sigma}{2}(\alpha = 45°)$$

方位角 α：逆时针方向为正；剪应力 τ_{max}：使研究对象有顺时针转动趋势为正。

5. 轴向拉压杆的变形与胡克定律

由 $\sigma = \dfrac{N}{A}$ ， $\epsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ 以及胡克定律 $\sigma = E\epsilon$ 得：

$\dfrac{N}{EA} = \dfrac{\Delta l}{l}$ $\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}$，该式仍称为胡克定律

式中 EA：截面抗拉压刚度，简称为拉压刚度；Δl 拉为正，压为负。

由简单胡克定律得轴向线应变：$\epsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} = \dfrac{N}{EA}$

轴向拉压杆的轴向变形公式：$\Delta l = \int_0^l d\Delta l = \int_0^l \dfrac{N}{EA} dx$

对于各向同性材料，横向变形为：$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu\epsilon_x = -\dfrac{\mu}{E}\sigma_x$

6. 拉压杆的横向变形与泊松比

$\epsilon' = \Delta d/d$（横向应变，负值）

泊松比：$\mu = \left|\dfrac{\epsilon'}{\epsilon}\right| = -\dfrac{\epsilon'}{\epsilon}, \epsilon' = -\mu\epsilon = -\mu\dfrac{\sigma}{E}$

对于各向同性材料，弹性模量 E，泊松比 μ 与切变模量 G 之间存在如下关系，即只有两个独立弹性常数：$G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$

7. 轴向拉压应变能

准静态加载(逐渐缓慢加载,可忽略动能与热能的变化),此时应变能=外力功,即 $U=W$。

$W=\int_0^{\Delta}P\mathrm{d}\delta$,对于线弹性材料:$P=k\delta$

$W=\frac{1}{2}k\Delta^2=\frac{1}{2}P\Delta$,拉压杆(等截面,应力为常数)

$$P=N,\Delta=\Delta l=\frac{Nl}{\mathrm{EA}}$$

$$U=W=\frac{N^2l}{2\mathrm{EA}}$$

8. 拉压与形状应变比能

应变比能:单位体积的应变能 $u=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}$,单元体 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 。

(1)轴向拉压

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}P\cdot\mathrm{d}\Delta}{2}=\frac{\sigma\mathrm{d}x\mathrm{d}z\cdot\varepsilon\mathrm{d}y}{2}=\frac{\sigma\varepsilon}{2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x\qquad\therefore u=\frac{\sigma\varepsilon}{2}=\frac{\sigma^2}{2\mathrm{E}}$$

(2)纯剪

$$\mathrm{d}U=\frac{\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}z\cdot\gamma\mathrm{d}y}{2}=\frac{\tau\gamma}{2}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\qquad\therefore u=\frac{\tau\gamma}{2}=\frac{\tau^2}{2\mathrm{G}}$$

9. 轴向拉压静不定问题以及温度应力、装配应力的概念

(1)静不定问题

单凭静力学平衡方程不能解出全部未知力的问题,称为静不定问题。静不定问题的特点是未知力的数目多于静力平衡方程式的数目,所以求解静不定问题的关键是建立关于未知力的补充方程。

由于多余约束的存在,杆系的变形受到了限制,因此,补充方程可由杆件各部分间或杆系中各杆间变形是协调的这一条件,即从变形的几何关系方面人手得到。

建立了与静不定次数相等的补充方程后,静不定问题迎刃而解。一般超静定问题的解法为:

①解除“多余”约束,使超静定结构变为静定结构(此相应静定结构称静定基),建立静力平衡方程。

②根据“多余”约束性质,建立变形协调方程。

③建立物理方程(如胡克定律,热膨胀规律等)。

④联立解静力平衡方程以及②和③所建立的补充方程,求出未知力(约束力或内力)。

变形协调条件应使静定基变形与原超静定结构相一致。

(2)温度应力

温度变化要引起物体的膨胀或收缩。对于静定结构,杆件可以自由变形,当温度均匀变化时,在构件内不会引起应力;但对于静不定结构,由于构件变形受到部分或全部约束,温度变化时就要引起应力。这种由温度变化所引起的应力,称为温度应力。

在求解此类问题时,除了需要建立静力方程外,还需补充一个变形协调方程:

$$\Delta l_R = \Delta l_T$$

$\Delta\ l_R$是杆件因 R 作用而产生的缩短；Δl_T 是温度上升 ΔT 时的伸长。

以及增加物理方程：$\Delta l_T = \alpha\Delta T \cdot l$，$\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}$

(3)装配应力

构件的加工误差是难以避免的。对静定结构，加工误差只是引起结构几何形状的微小变化，而不会在构件内引起应力。但对静不定结构，加工误差就要在构件内引起应力。这种由于装配而引起的应力称为装配应力。

10. 应力集中的概念

实际工程构件中，有些零件常存在切口、切槽、油孔、螺纹等，致使这些部位上的截面尺寸发生突然变化。

例如开有圆孔和带有切口的板条，当其受轴向拉伸时，在圆孔和切口附近的局部区域内，应力的数值剧烈增加，而在离开这一区域稍远的地方，应力迅速降低而趋于均匀。这种现象，称为应力集中。

截面尺寸变化越急剧，孔越小，角越尖，应力集中的程度就越严重，局部出现的最大应力 σ_{max} 就越大。鉴于应力集中往往会削弱杆件的强度，因此在设计中应尽可能避免或降低应力集中的影响。

为了表示应力集中的强弱程度，定义理论应力集中系数：$k = \dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_0}$

k 值可查阅有关设计手册。当 $b \gg d$，则 $k=3$。其中 σ_{max}为削弱面上轴向正应力的峰值；σ_0 为削弱面上名义应力。如对厚度为 t 的矩形截面板条：

$$\sigma_0 = \frac{p}{t(b-d)}$$

其中 b 为板条原宽度，d 为孔径或切口宽度。

必须指出，材料的良好塑性变形能力可以缓和应力集中峰值，因而对低碳钢之类的塑性材料应力集中对强度的削弱作用不很明显，而对脆性材料，特别对铸铁之类内含大量显微缺陷、组织不均匀的材料将造成严重影响。

第二节 典型题分析

重要考点提示：

(1)阶梯形杆的变形计算；

(2)静不定问题的计算。包括：从力学方面建立静力平衡方程式，从变形方面建立变形协调方程式，从物理方面，建立变形与力之间的关系式；

(3)结构装配应力的计算。关键在于正确建立补充方程；

(4)构件受惯性力作用时的应力计算。对作加速运动的质点系，如果值想地在每一质点上加上惯性力，则质点系上的原力系与惯性力系组成平衡力系。这样，就可把动力学问题在形式上作为静力学问题来处理，即动静法。

【例 1】 图 2-2 所示杆系的两杆同为钢杆，$E=200GPa$，$\alpha=12.5\times10^{-6}/℃$。两杆的横截面面积同为 $10cm^2$，若 BC 杆的温度降低 20℃，而 BD 杆的温度不变，试求两杆的应力。（同济大学，2002 年）

解 BC 杆降温，其冷缩受到杆 BD 和支座 B 的约束，将受拉，BD 杆将受压，取节点 B 受力分析如图 2-3 所示。

图 2-2

图 2-3

由平衡条件 $\sum F=0$ 得：$N_{BC}\cdot\cos30^\circ=N_{BD}$ ①

对杆 BC 和 BD 的变形几何分析如图 2-4 所示，其中 BB′是杆 BC 的收缩量，BB″是杆 BD 的收缩量，即 $\Delta l_{BC}=BB'$，$\Delta l_{BD}=BB''$

图 2-4

从图中可见：$\Delta l_{BC}=\Delta l_{BD}\cdot\cos30^\circ$ ②

由物理条件，

$$\begin{cases}\Delta l_{BC}=-\dfrac{N_{BC}\cdot l_{BC}}{EA}-\alpha\cdot\Delta T\cdot l_{BC} & ③\\ \Delta l_{BD}=\dfrac{N_{BD}\cdot l_{BD}}{EA} & ④\end{cases}$$

联合①②③④，解出 $N_{BC}=30.3kN$，$N_{BD}=26.2kN$

$$\begin{cases}\sigma_{BC}=\dfrac{N_{BC}}{A}=30.3(MPa)\\ \sigma_{BD}=\dfrac{N_{BD}}{A}=26.2(MPa)\end{cases}$$

即是两杆的应力。

评注：超静定结构中，由于温度改变引起的变形是外力变形和温度变形共同引起的，这是超静定结构特有的，要引起注意。

【例 2】 如图 2-5 所示的 T 形刚体，受杆 1、杆 2 和活动铰链约束，两杆横截面积为 A_1 和 A_2，两杆材料相同，许用拉应力$[\sigma^+]=100MPa$，许用压应力$[\sigma^-]=40MPa$，试按强度条件确定许可载荷 P 值。（$A_1=200mm^2$，$A_2=300mm^2$）（南京航空航天大学，2002 年）

解 取 T 形刚体作为研究对象，受力分析如图 2-6 所示：

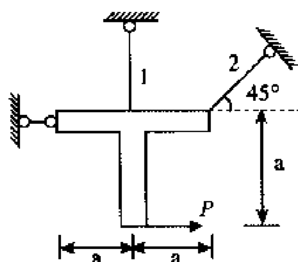


图 2-5

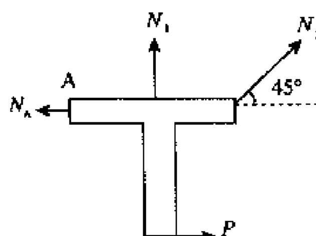


图 2-6

由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum M_A = 0$ 得到：

$$\begin{cases} N_1 + N_2 \cdot \cos45^\circ = 0 \\ N_1 \cdot a + P \cdot a + N_2 \cdot 2a \cdot \cos45^\circ = 0 \end{cases}$$

由上面两式解出：$N_1 = P$（拉），$N_2 = -\sqrt{2}P$（压）

对杆 1：$\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{P}{A_1} \leqslant [\sigma^+] = 100\text{MPa} \qquad P \leqslant 20\text{kN}$

对杆 2：$\sigma_2 = \dfrac{|N_2|}{A_2} = \dfrac{|-\sqrt{2}P|}{A_2} \leqslant [\sigma^-] = 40\text{MPa} \qquad P \leqslant 8.5\text{kN}$

许可荷载是：$[P] = 8.5\text{k}N$

评注：对杆体进行强度校核是材料力学的重要任务之一。要在保证每一项强度指标都满足的前提下得到最小荷载即为许用荷载。

【例 3】 如图 2-7 所示的支架中，已知两杆材料相同，其横截面积之比是 $A_1/A_2 = 2/3$，承受荷载 F。

试求：(1)两杆内的应力相等时的夹角 θ

(2)若 $F = 10\text{kN}$，$A_1 = 100\text{mm}^2$ 时的杆内应力（东南大学，2002 年）

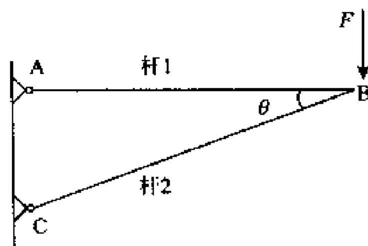


图 2-7

解 (1)设杆 1 和杆 2 内力是 N_1，N_2，取节点 B 分析如图 2-8 所示。

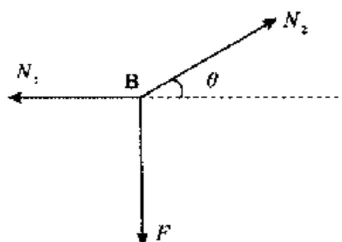


图 2-8

由平衡条件 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 得到

$$\begin{cases} N_2\cos\theta - N_1 = 0 & ① \\ N_2\sin\theta - F = 0 & ② \end{cases}$$

若要求两杆应力相等,则:$\sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2}$

即:$\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2}{3}$

而由①式,$\dfrac{N_1}{N_2} = \cos\theta$

从以上两式,$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$

即:当 $\theta = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right)$ 时,杆 1 和杆 2 的应力相等。

(2)若 $F=10\text{kN}$,则由式①和式②,得到

$$\begin{cases} N_2 = \dfrac{F}{\sin\theta} \\ N_1 = N_2\cos\theta = F \cdot \cot\theta \end{cases}$$

于是,杆内应力是

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N_1}{A_1} = \dfrac{10\times 10^3}{100} \cdot \cot\theta = 100\cot\theta(\text{MPa}) \\ \sigma_2 = \dfrac{N_2}{A_2} = \dfrac{10\times 10^3}{100\times \dfrac{3}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{67}{\sin\theta}(\text{MPa}) \end{cases}$$

评注:材料力学的计算十分复杂,读者要养成良好的解题习惯,以免因为计算失误而失分。

【例 4】 如图 2-9 示阶梯形圆杆,其长度与直径分别是 l_1, l_2, d_1, d_2。若杆的弹性模量为 E,在 C 作用有轴向力 P,求 C 截面的轴向位移△C(北京航空航天大学,2002 年)。

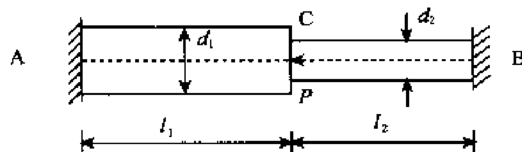


图 2-9

解　设固定端 A 和 B 的支反力分别是 N_A 和 N_B,对阶梯杆受力分析,如图 2-10 所示:

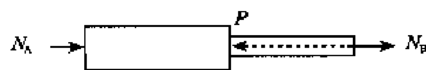


图 2-10

由平衡条件 $\sum F = 0$ 得到,

$N_A + N_B = P$ 　　①

分析阶梯形圆杆的变形协调条件,有

$\Delta l_{AC} = \Delta l_{BC}$ (A,B 均为固定端,阶梯形圆杆总长度不变)　　②

由物理方程，

$$\Delta l_{AC}=\frac{N_A l_1}{E\cdot A_1}=\frac{N_A l_1}{E\cdot\frac{\pi}{4}d_1^2} \qquad ③$$

$$\Delta l_{BC}=\frac{N_B l_2}{E\cdot A_2}=\frac{N_B l_2}{E\cdot\frac{\pi}{4}d_2^2} \qquad ④$$

联立①②③④，$N_A=P\cdot\dfrac{l_2 d_1^2}{l_1 d_2^2+l_2 d_1^2}$

于是，$\Delta C=\Delta l_{AC}=\dfrac{N_A l_1}{E\cdot\frac{\pi}{4}d_1^2}=4P\cdot\dfrac{l_1 l_2}{E\pi(l_1 d_2^2+l_2 d_1^2)}$（方向水平向左）

评注：一次超静定问题，变形协调条件作为补充方程。读者应学会建立相应变形协调条件。

【例 5】 在图 2-11 示结构中，CD 为刚性杆，已知 $P=3\text{kN}$，斜杆 AB 的截面面积 $A=100\text{mm}^2$，许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$，试校核 AB 杆的强度。（华东理工大学，2002 年）

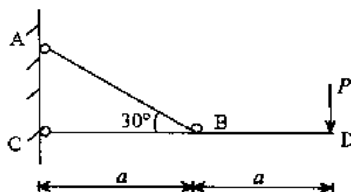


图 2-11

解 取刚性杆 CD 作为研究对象，受力分析如图 2-12 所示。

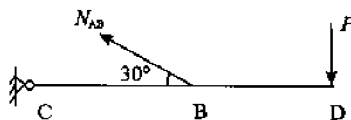


图 2-12

由平衡条件 $\sum M_C=0$ 得到：

$$P\cdot 2a-N_{AB}\cdot\sin 30^\circ\cdot a=0$$

$$N_{AB}=4P=12\text{kN}$$

杆 AB 受拉应力为：$\sigma_{AB}=\dfrac{N_{AB}}{A}=\dfrac{12\times10^3}{100\times10^{-6}}=120\text{MPa}$

而$[\sigma]=160\text{MPa}$，显然 $\sigma_{AB}<[\sigma]$，杆 AB 是安全的！

评注：本题是一道基本概念题，属送分题。

【例 6】 在图 2-13 所示结构中，AB 杆长 l，CD 杆长 $l-\delta$，其中 $\delta\ll l$，BE 为刚性杆，AB 杆和 CD 杆抗拉压刚度同是 EA，若将 CD 杆装配到 E 节点上，求两弹性杆由此产生的装配应力。（南京理工大学，2002 年）

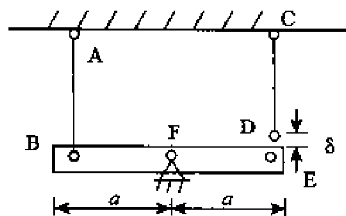


图 2-13

解　由于制造误差 CD 杆长 $l-\delta$，当 CD 杆装配到 E 节点上后，CD 杆受拉(设拉力是 N_{CD})。从铰 F 的平衡条件知道杆 AB 同样受拉(设拉力是 N_{AB})。

对刚性杆 BE 的受力分析如图 2-14 所示：

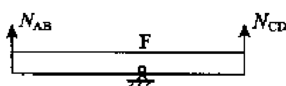


图 2-14

由平衡条件 $\sum M_F = 0$ 得到，

$N_{AB} \cdot a - N_{CD} \cdot a = 0$，即：$N_{AB} = N_{CD}$

对结构的变形协调条件进行分析如图 2-15 所示：

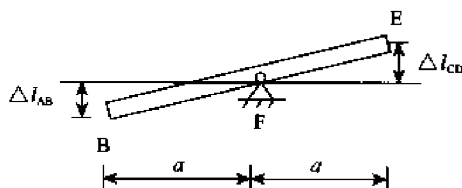


图 2-15

由于 BE 是刚性杆，从图中几何关系有：$\Delta l_{AB} = \delta - \Delta l_{CD}$

由物理条件，

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l}{EA}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot (l-\delta)}{EA}$$

由上面四式解出：$N_{AB} = N_{CD} = \dfrac{EA\delta}{2l-\delta}$

即两弹性杆由于制造误差产生的装配内力是 $\dfrac{EA\delta}{2l-\delta}$。

评注：装配应力是实际生活中比较常见的应力形式，在材料力学习题中也非常常见，读者要熟悉该类问题的变形协调条件的建立。

【例 7】　图 2-16 所示胶合而成的等截面轴向拉杆，杆的强度由胶缝控制，已知胶的许用剪应力$[\tau]$为许用正应力$[\sigma]$的一半。问 α 为何值时，胶缝处的剪应力和正应力同时达到各自的许用应力。(河海大学，2000 年)

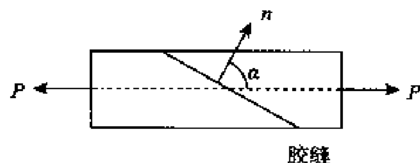


图 2-16

解 在胶合面上，将外力 P 分解成平行于胶合面的力 P_1 和垂直于胶合面的力 P_2 两部分，如图 2-17 所示。

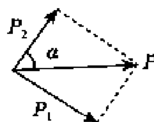


图 2-17

从图中几何关系知：$P_1 = P\sin\alpha$, $P_2 = P\cos\alpha$

设横截面积为 A，则胶合面的面积是 $\dfrac{A}{\cos\alpha}$ ，得到胶合面的正应力和剪应力分别是：

$$\begin{cases}\sigma = \dfrac{P_2}{A/\cos\alpha} = \dfrac{P}{A}\cdot\cos^2\alpha \\ \tau = \dfrac{P_1}{A/\cos\alpha} = \dfrac{P}{A}\cdot\dfrac{1}{2}\sin2\alpha\end{cases}$$

要使胶缝处的剪应力和正应力同时达到各自的许用应力，则：

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{[\sigma]}{[\tau]} = \frac{2}{1}$$

有 $\dfrac{\cos^2\alpha}{\dfrac{1}{2}\sin2\alpha} = 2$ ，故 $\alpha = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

即当 $\alpha = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 时，胶缝处剪应力和正应力同时达到各自许用应力。

评注：本题属于材料强度的优化问题。工程中，要优化设计以使构件在最大限度内满足需要（例如等强度梁），这类考题在考试中非常多见，读者要摸清套路。

【例 8】 如图 2-18 所示，刚性梁 AB 水平地挂在两根圆钢杆上，已知钢弹性模量 E＝200GPa，钢杆直径分别是 $d_1=20\text{mm}$，$d_2=25\text{mm}$，今在刚性梁 AB 上作用一横向力 P，问 P 在何处才能使刚性梁水平下降？（复旦大学，1999 年）

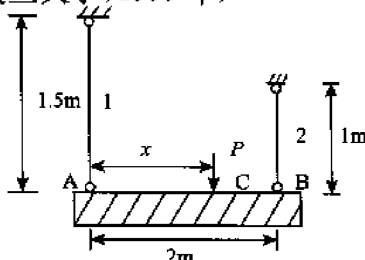


图 2-18

解　设圆钢杆 1 和 2 中的作用力分别是 N_1(拉)和 N_2(拉)，对钢杆进行受力分析如图 2-19 所示：

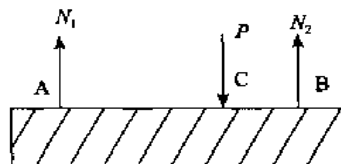


图 2-19

由平衡条件 $\sum F=0$ 和 $\sum M_A=0$ 得到

$$\begin{cases} N_1+N_2=P & ① \\ P\cdot x-2N_2=0 & ② \end{cases}$$

由题意，刚性梁 AB 水平下降，即有变形协调条件

$$\Delta l_1=\Delta l_2 \quad ③$$

由物理条件，

$$\begin{cases} \Delta l_2=\dfrac{N_1 l_1}{EA_1}=\dfrac{N_1 l_1}{E\cdot\dfrac{1}{4}\pi d_1^2} & ④ \\ \Delta l_2=\dfrac{N_2 l_2}{EA_2}=\dfrac{N_2 l_2}{E\cdot\dfrac{1}{4}\pi d_2^2} & ⑤ \end{cases}$$

其中，$l_1=1.5\text{m}, l_2=1\text{m}, d_1=20\text{mm}, d_2=25\text{mm}, E=200\text{GPa}$

联立①②③④⑤解出 $x=1.4\text{m}$

评注：抓住刚性梁水平下降这个隐藏的变形协调条件，才能顺利地求解本题。本题的物理背景来源于"工程吊装问题"。

【例 9】　如图 2-20 所示，刚性梁 AB 由三根材料相同，截面积均是 A 的杆悬挂，求力 P 作用下的三杆的轴力和变形。(南京航空航天大学，2000 年)

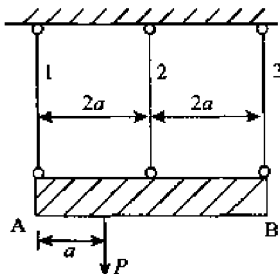


图 2-20

解　设 1、2、3 三杆的拉力分别是 N_1、N_2、N_3，对刚性梁进行分析如图 2-21 所示：

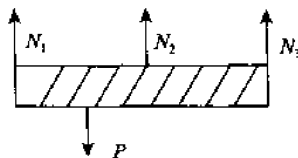


图 2-21

由平衡条件 $\sum F=0$ 和 $\sum M_A=0$ 得到

$$\begin{cases} N_1+N_2+N_3=P & ① \\ N_2\cdot 2a+N_3\cdot 4a-Pa=0 & ② \end{cases}$$

由于 AB 是刚性梁得到结构的变形协调条件如图 2-22 所示，

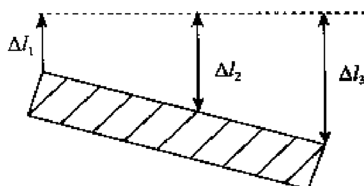


图 2-22

即 $2\Delta l_2=\Delta l_1+\Delta l_3$ ③

由物理条件：

$$\Delta l_1=\frac{N_1 l_1}{EA},\ \Delta l_2=\frac{N_2 l_2}{EA},\ \Delta l_3=\frac{N_3 l_3}{EA} \quad ④$$

其中 $l_1=l_2=l_3=l$，联合①②③④得：

$$N_1=\frac{7}{12}P\ (拉),\ N_2=\frac{1}{3}P\ (拉),\ N_3=\frac{1}{12}P\ (拉)$$

$$\Delta l_1=\frac{7Pl}{12EA},\ \Delta l_2=\frac{Pl}{3EA},\ \Delta l_3=\frac{Pl}{12EA}$$

评注：解题时一般将杆件内力设为拉力。若计算结果是正值，则内力是拉力；若计算结果是负值，则内力是压力。读者应保持这种良好的解题习惯，使解题过程简洁、明快。

【例 10】 如图 2-23 所示的正方形桁架，边长为 a，在节点 A，B 处受到一对大小为 P 的水平力作用。各杆的材料弹性模量是 E，各杆的横截面积是 A。试求：

(1)杆 AB 的内力；

(2)节点 A、B 的相对位移；

(3)若将两个 P 力同时转过 180°，使其指向 AB 杆，上述结果会不会变化？可能出现什么问题？(浙江大学，1999 年)

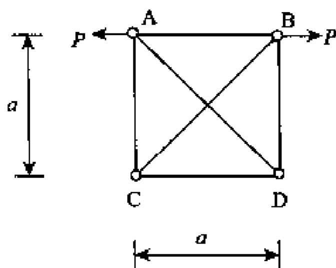


图 2-23

解 (方法一，功能原理方法)

(1)设 AB 杆内力是 N(拉)，对各节点应用平衡方程容易获得各杆的内力如图 2-24 所示；

结构各杆件变形能之和是：

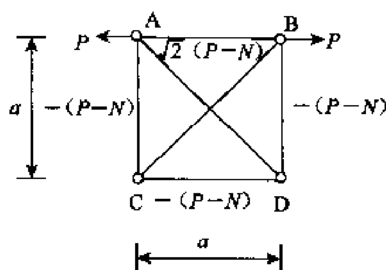


图 2-24

$$U=\frac{N^2a}{2EA}+3\cdot\frac{(P-N)^2a}{2EA}+2\cdot\frac{\left[\sqrt{2}(P-N)\right]^2\cdot\sqrt{2}a}{2EA}$$

而外力做功是：$W=\frac{1}{2}P\cdot\Delta l_{AB}=\frac{1}{2}P\cdot\frac{Na}{EA}$

根据功能关系，即外力做功等于变形能，有 $W=U$

联合上面三式可得 $N=\frac{5-\sqrt{2}}{4}\cdot P$

(2)这样，$\Delta l_{AB}=\frac{Na}{EA}=\frac{5-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{Pa}{EA}$

(3)若两个 P 力同时转 180°，则各杆内力也反向，AB 杆的相对位移是，

$$\Delta l_{AB}=-\frac{5-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{Pa}{EA}$$

此时，杆 AB 所受压力最大，有可能出现失稳。

(方法二，解除约束方法)

将多余约束 AB 杆解除，代之以力 N，对结构的受力分析如图 2-25 所示，

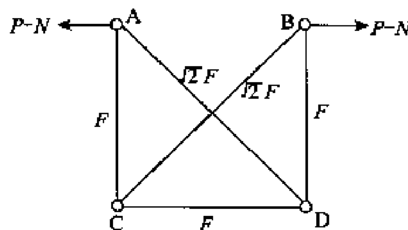


图 2-25

令 $P-N=F$，则系统的变形能是：$U=3\cdot\frac{F^2a}{2EA}+2\cdot\frac{(\sqrt{2}F)^2\cdot\sqrt{2}a}{2EA}$ ①

利用卡氏定理，节点 A，B 的相对位移是：$\Delta l_{AB}=\frac{\partial U}{\partial F}=(4\sqrt{2}+3)\cdot\frac{Fa}{EA}$ ②

而节点 A，B 的相对位移 a 等于杆 AB 的伸长，即：$\Delta l_{AB}=\frac{Na}{EA}$ ③

联合②③得到 $N=\frac{5-\sqrt{2}}{4}\cdot P$，$\Delta l_{AB}=\frac{5-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{Pa}{EA}$

(以下同方法一)

评注：方法二中求位移的方法还有单位载荷法、莫尔积分图乘法、功的互等定理方法，在后

续章节将会介绍，这里从略。

【例 11】 高为 h 的直立圆柱，只受容重 r 的自重作用，若将其上下端固定且保持柱的原长不变，如图 2-26 所示，圆柱材料的抗拉模量 E_2，抗压模量 E_1，求 $\sigma=0$ 时的坐标 z 值 C。（武汉大学，2002 年）

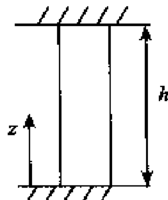


图 2-26

解 设上端和下端的支反力分别是 N_1，N_2，圆柱的横面积为 A，对直立圆柱的受力分析如图 2-27 所示，



图 2-27

由平衡条件 $\sum F=0$ 得到：$N_1+N_2=r\text{A}h$ ①

直立圆柱上段受拉，下端受压，成线性分布，如图 2-28 所示。

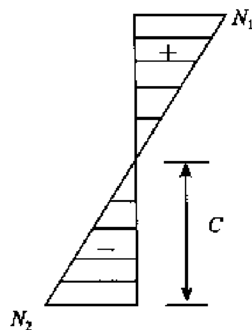


图 2-28

圆柱上段的伸长量是：$\Delta l_1=\int_0^{h-C}\frac{1}{E_2\text{A}}\cdot\frac{N_1}{h-C}\cdot\xi\cdot d\xi=\frac{1}{2}\cdot\frac{N_1\cdot(h-C)}{E_2\text{A}}$

圆柱下段的缩短量是：$\Delta l_2=\int_0^{C}\frac{1}{E_1\text{A}}\cdot\frac{N_2}{C}\cdot\xi\cdot d\xi=\frac{1}{2}\cdot\frac{N_2C}{E_1\text{A}}$

由变形协调条件 $\Delta l_1=\Delta l_2$（直立圆柱上下端固定，原长不变）

得到：$\frac{1}{2}\cdot\frac{N_1(h-C)}{E_2\text{A}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{N_2C}{E_1\text{A}}$

$\frac{N_1}{N_2}=\frac{E_2}{E_1}\cdot\frac{C}{h-C}$ ②

而从图 2-28 不难发现 $\frac{N_1}{N_2}=\frac{h-C}{C}$ ③

比较②式和③式，有 $C=\frac{h}{1+\sqrt{E_2/E_1}}$

评注：本题是一道全国力学竞赛题，考查的是一次超静定结构的计算。对线性分布轴力作用下的构件变形计算是本题的关键。

【例 12】 如图 2-29 所示五杆桁架，各杆横截面积与材料均相同，试求出在载荷 P 作用下的各杆轴力。（吉林大学，2002 年）

解 解除杆 AB 代之以力 N_{AB}，对结构的受力分析如图 2-30 所示，

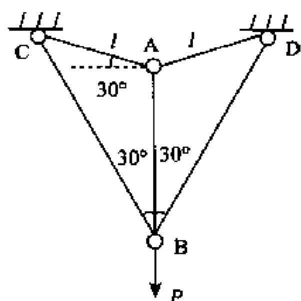


图 2-29

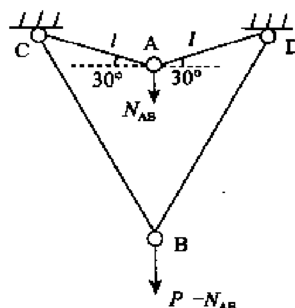


图 2-30

对节点 A 和节点 B 的受力分析如图 2-31 和图 2-32 所示，

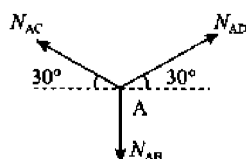


图 2-31

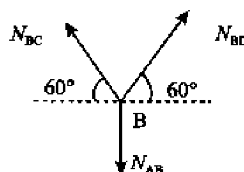


图 2-32

由平衡条件 $\sum F_A=0$ 和 $\sum F_B=0$ 得到：

$$N_{AC}=N_{AD}=N_{AB},N_{BC}=N_{BD}=\frac{P-N_{AB}}{\sqrt{3}}$$

对节点 A 和节点 B 变形协调条件的分析如图 2-33 和图 2-34 所示，

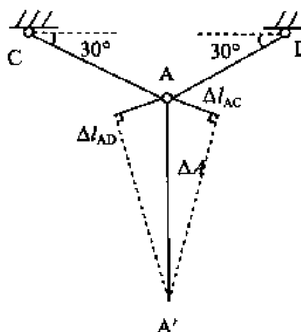


图 2-33

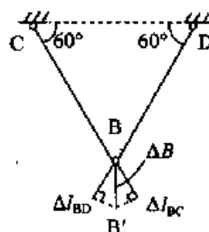


图 2-34

从图中的几何关系有：

$$\Delta A=\frac{\Delta l_{AC}}{\sin 30^{\circ}}=2\cdot\Delta l_{AC},\Delta B=\frac{\Delta l_{BC}}{\sin 60^{\circ}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\Delta l_{BC}$$

而点 A 和点 B 的相对位移就是杆 AB 的伸长量，即：$\Delta B-\Delta A=\Delta l_{AB}$

由物理条件，

$$\Delta l_{AB}=\frac{N_{AB}\cdot l}{EA},\Delta l_{AC}=\frac{N_{AC}\cdot l}{EA},\Delta l_{BC}=\frac{N_{BC}\cdot l}{EA}$$

联合上面各式即可解出：

$N_{AB}=\dfrac{2(3\sqrt{3}-2)}{23}\cdot P$（拉），

$N_{AC}=N_{AD}=\dfrac{2(3\sqrt{3}-2)}{23}\cdot P$（拉），

$N_{BC}=N_{BD}=\dfrac{3(3\sqrt{3}-2)}{23}\cdot P$（拉）。

评注：一次超静定结构，解除一根杆件即可。从结构对称性条件中不难发现解除杆 AB 最为合适。

【例 13】 结构如图 2-35 所示，$l_1=l_3=l,l_2=2l$，三杆材料相同，$E=2\times10^5$MPa，截而面积相同，$A=100\text{mm}^2$

求：(1)若测出杆 1、杆 2 的线应变分别是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$，计算 ε_3；

(2)当 $\varepsilon_1=300\times10^{-6},\varepsilon_2=400\times10^{-6}$时，计算力 P 的值及 P 与垂直线夹角 θ。（同济大学，2000 年）

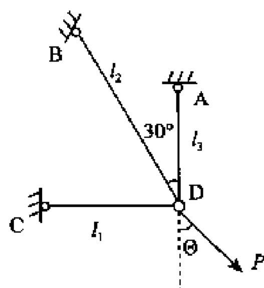


图 2-35

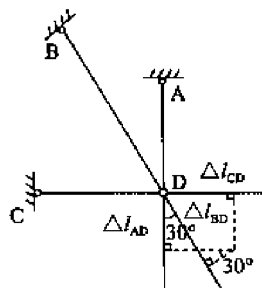


图 2-36

解 (1)对节点 D 的变形协调条件进行分析如图 2-36 所示。若杆 1，杆 2，杆 3 的应变分别是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，则：

$$\Delta l_{CD}=l_1\varepsilon_1,\Delta l_{BD}=l_2\varepsilon_2,\Delta l_{AD}=l_3\varepsilon_3$$

从图 2-36 中的几何关系得到：

$$\Delta l_{BD}=\frac{\Delta l_{AD}}{\cos 30^{\circ}}+(\Delta l_{CD}-\Delta l_{AD}\tan 30^{\circ})\sin 30^{\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta l_{AD}+\frac{1}{2}\Delta l_{CD}$$

联合上面各式即可得出：$\varepsilon_3 = \frac{4}{3}\sqrt{3}\varepsilon_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_1$

(2)当 $\varepsilon_1 = 300\times10^{-6}$，$\varepsilon_2 = 400\times10^{-6}$时，由(1)知道 $\varepsilon_3 = 750\times10^{-6}$而 $\varepsilon = \frac{N}{EA}$，即

$$N_1 = EA\varepsilon_1 = 6kN, N_2 = EA\varepsilon_2 = 8kN, N_3 = EA\varepsilon_3 = 15kN$$

对节点 D 进行受力分析如图 2-37 所示，

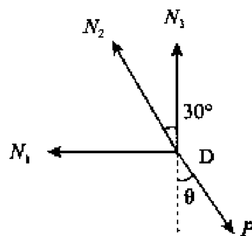


图 2-37

由平衡条件 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 得到

$$\begin{cases} P\sin\theta - N_2\sin30^\circ - N_1 = 0 \\ N_3 + N_2\cos30^\circ - P\cos\theta = 0 \end{cases}$$

联立上面两式解出 $P = 24kN$，$\theta = \arctan(0.456) = 24.5^\circ$

评注：关键是找到变形协调条件，对位移图的分析能力需要在解题过程中培养。

第三节　习　题

一、简答题

1. 当低碳钢试件的试验应力 $\sigma = \sigma_s$ 时，试件出现什么现象？（长安大学，2001 年）

二、填空题

1. 空心圆轴轴向拉伸时，受力在弹性范围内，外径将________，内径将________（填“减小”或“增大”）

2. 轴向拉伸杆，正应力最大的截面是________，切应力最大的截面是________。

3. 进入屈服阶段以后，材料发生________变形。

4. 一个结构中有三根拉压杆，设由这三根杆的强度条件确定的结构许用载荷分别为 F_1、F_2、F_3，且 $F_1 > F_2 > F_3$，则该结构的实际许可载荷[F]为________。

5. 连接件应力的实用计算是以假设________为基础的。

6. 在连接件剪切强度的实用计算中，剪切许用力[τ]是由________实验得到的。

7. 置于刚性平面上的短粗圆柱体 AB，在上端面中心处受到一刚性圆柱压头的作用，如图 2-38 所示。若已知压头和圆柱的横截面面积分别为 150mm²、250mm²，圆柱 AB 的许用压应力 $[\sigma_c] = 100MPa$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 220MPa$，则圆柱 AB 将________破坏。

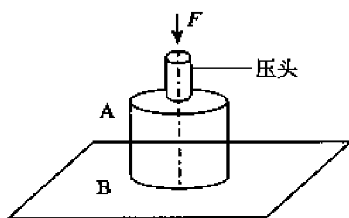


图 2-38

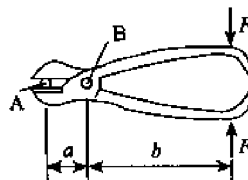


图 2-39

8. 图 2-39 所示 A 和 B 的直径都为 d，则两者中最大剪应力为________。

三、选择题

1. 两根受相同轴向拉力作用的杆件，它们的材料和横截面面积相同，杆 1 的长度为杆 2 的 2 倍，试比较它们的轴力和轴向变形。正确结论为：________。

   A. 两杆的轴力和轴向变形相同
   B. 两杆的轴力相同，杆 1 的轴向变形比杆 2 的小
   C. 两杆的轴力相同，杆 1 的轴向变形比杆 2 的大
   D. 两杆的变形相同，杆 1 的轴力比杆 2 的大

2. 图 2-40 所示四根受拉杆危险横截面的面积相同，首先破坏的杆件为________。

3. 图 2-41 所示拉杆的外表面上有一斜线，当拉杆变形时，斜线将

   A. 平动　　B. 转动　　C. 不动　　D. 平动加转动

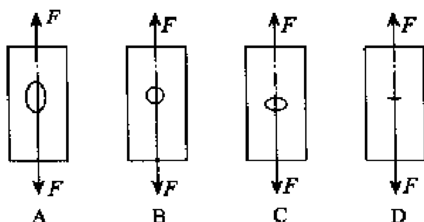


图 2-40

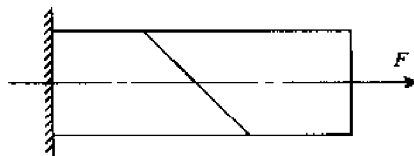


图 2-41

4. 矩形截面拉杆横截面面积为 A，受轴向拉力 F，如图 2-42 所示。已知材料的弹性模量为 E，泊松比为 μ，则杆表面直角 ABC 的角度改变量

   A. $\frac{\sqrt{3}}{8}(1+\mu)\frac{F}{AE}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2(1+\mu)}\frac{F}{AE}$

   C. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\mu)\frac{F}{AE}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\mu)\frac{F}{AE}$

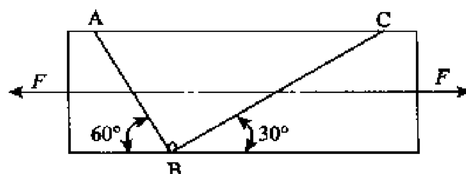


图 2-42

5. 已知图 2-43 所示杆件横截面面积为 A，材料的弹性模量为 E，杆件 A、B 两端的支座反力为________。

A. $F_A=F, F_B=0$　　B. $F_A=2F/3, F_B=F/3$

C. $F_A=F/3, F_B=2F/3$　　D. $F_A=F/2, F_B=F/2$

6. 如图 2-44 所示的钢杆 1、2、3 的拉压刚度均为 EA，长为 L，若杆 3 在制造时短了 δ，则正确的变形协调条件为________。

A. $\delta=\delta_1+2\delta_2+\delta_3$　B. $\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3$　C. $\delta=\delta_1+2\delta_2-\delta_3$　D. $\delta=2\delta_1+\delta_2+\delta_3$

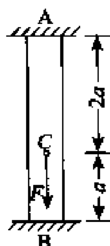


图 2-43

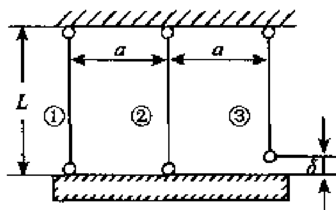


图 2-44

四、判断题

1. 应力公式 $\sigma=\dfrac{N}{A}$ 的使用条件是，外力沿杆件轴线，且材料服从胡克定律。（　　）

2. 应力—应变曲线的纵、横坐标分别为 $\sigma=P/A$，$\varepsilon=\Delta L/L$，其中 A 和 L 均为初始值。（　　）

3. 在连接件上，剪切面和挤压面分别平行、垂直于外力方向。（　　）

五、作图题

已知杆轴力图（图 2-45），试标出相应横截面上的轴力。

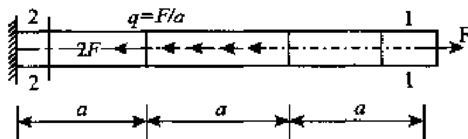


图 2-45

六、计算题

1. 如图 2-46 所示三角架受力 P 作用，杆的截面积为 A，弹性模量为 E，试求杆的内力和 A 点的铅垂位移 δ_{Ay}。

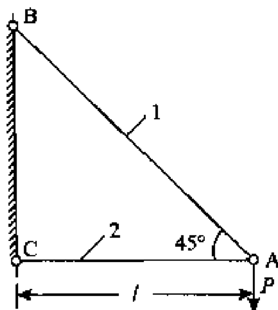


图 2-46

2. 如图 2-47 所示受压柱，长 L，不考虑重力作用，求其在作用力 P 的作用下，柱的压缩量。

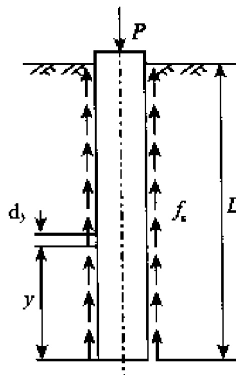


图 2-47

3. 一木柱受力如图 2-48 所示，柱的横截面为边长 20cm 的正方形，材料服从胡克定律，其弹性模量 E=10GPa，如不计柱的自重，试求：

(1)做轴力图；

(2)各段柱横截面上的应力；

(3)各段柱的纵向线应变；

(4)柱的总变形。

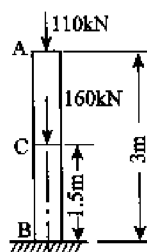


图 2-48

4. 作图 2-49 所示杆的轴力图，并求杆的应变能(EA 已知)。

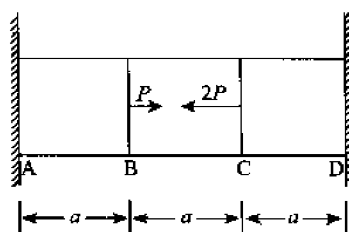


图 2-49

5. 一钢丝沿铅垂方向绷紧在 A，B 两点间。绳子长 $l=1.0\text{m}$，截面积 $A=1.0\text{cm}^2$，预应力 $\sigma_0=100\text{MPa}$，在 $l_1=0.4\text{m}$ 处加一个向下的载荷 P，绳的许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$，试求：

(1)$E=200\text{GPa}$；许用载荷$[P]$及 C 点的位移；

(2)若要提高$[P]$，施力点 C 应取在何处？$[P]$应该提高到多少？

6. 螺栓连接如图 2-50 所示，设两者靠螺纹均匀传递拉力 P，螺栓直径 $d=50\text{mm}$。现需要在螺栓上钻直径 $d_1=15\text{mm}$ 的销孔，要求过销孔中心线的截面应力较螺栓危险面上的应力小 20%。求销孔与螺帽上缘的距离 x。

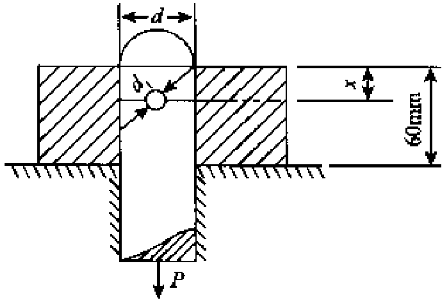


图 2-50

7. 一外径 $D_1=50\text{mm}$，内径 $d_1=25\text{mm}$ 的铜管套在直径 $d_2=25\text{mm}$ 的钢杆之外，两端用直径为 $d=12\text{mm}$ 的销钉连接，如图 2-51 所示。铜和钢的弹性模量分别为 $E_1=105\text{GPa}$，$E_2=210\text{GPa}$，线膨胀系数分别为 $\alpha_1=17\times10^{-6}/℃$，$\alpha_2=11\times10^{-6}/℃$。设室温时，组合件没应力。试求当整个组合件的温度升高 50℃ 时销钉内的剪应力。

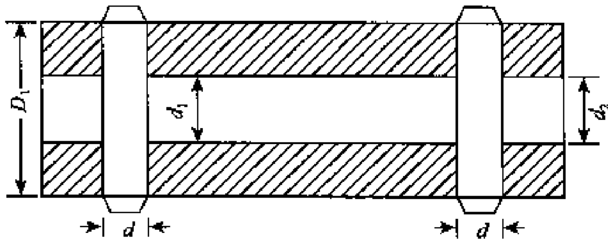


图 2-51

第3章　扭　　转

知识要点

本章主要介绍了杆件扭转的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)外力偶矩的计算；

(2)扭矩和扭矩图；

(3)纯剪切；

(4)圆轴扭转时的应力与变形；

(5)非圆截面杆扭转的概念；

(6)薄壁杆件的自由扭转。

第一节　本章内容总结

1. 扭转杆件的内力

受扭杆通常称为轴，所受的外力偶称为力偶矩 M(也称转矩)，若已知轴传递的功率为 P_P，单位千瓦(kW)。角速度(rad/s,弧度/秒)为 ω，n = 转速(r/min,转/分)。则有

$$P_P = M\omega$$

因此外力偶矩：$M = \dfrac{9549P_P}{n}$(N·m)

力偶矩表示的右手螺旋法则如下图所示：

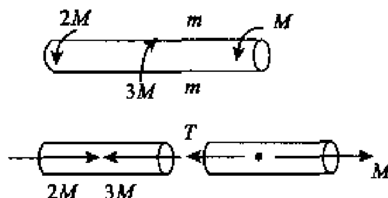


图 3-1

扭矩 T 用于表示扭转杆件的内力，某一横截面上的扭矩大小，等于该横截面同一侧绕轴线的全部外力偶矩的合力偶矩。矢量方向垂直于横截面的内力偶矩(矢量表示法与拉压杆轴力形式相同)。

符号：正的扭矩矩矢背向截面，即矢量方向与横截面外法线方向相同，负的扭矩矩矢指向截面。

2. 圆轴扭转横截面上切应力

平面假定：圆轴扭转变形后，横截面仍保持为平面，且其形状与大小以及两横截面间距离均

不改变。换言之，圆轴扭转变形时，各横截面如同刚性平面，仅绕轴线作相对转动而已；

扭转应力公式：

(1)几何方程

如图 3-2(a)所示先取一圆片，再过轴线截二刀，得一楔形体。如图 3-2(b)所示，此楔形体变形可用两角度 γ_ρ 和 $d\varphi$ 表示。纵向线偏转角 γ_ρ，两截面相对转角 $d\varphi$，根据弧长＝半径×圆心角

$$dd' = \gamma_\rho dx = \rho d\varphi$$

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad ①$$

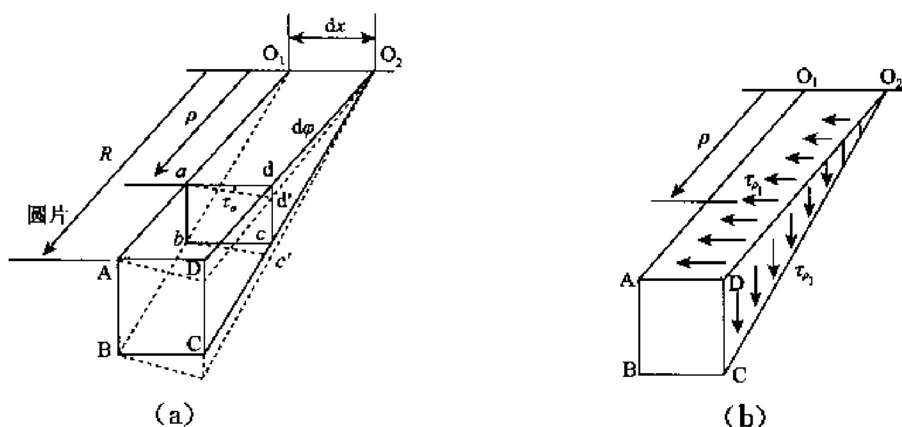


图 3-2

(2)物理方程

由剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$，将变形协调方程代入可得：

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx} \quad ②$$

ρ 为横截面上任一点到轴线的距离，τ_ρ 为该点的剪应力。

上式表明：扭转剪应力随 ρ 线性变化。$\rho = 0$ 的点，即原点处剪应力为 0，轴边缘剪应力最大，半径为 ρ 圆圈上剪应力相同；剪应力垂直半径。

(3)静力平衡方程

圆轴扭转横截面切应力公式：

$$T(x) = \int_A \tau_\rho \rho dA \quad ③$$

由①、②、③可得单位长度内的扭转角 θ：

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T(x)}{G \cdot I_p}$$

$$\tau_\rho = T(x)\rho / I_p$$

式中 $I_p = \int_A \rho^2 dA$ 是一个纯几何量，称为截面的极惯性矩，由此式可以看出：I_p 是与材料力学性能无关的几何性质参数，只与截面几何尺寸有关。

常用到的极惯性矩的计算：实心圆轴：$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$，空心圆轴：$I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$。

(4)最大剪应力方程

由圆轴扭转极截面切应力公式可知，在 $\rho = R$ 即圆截面边缘，剪应力最大。即：

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p}$$

其中 $W_p = \frac{I_p}{R}$ 为抗扭截面模量。对实心圆轴：$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$；空心圆轴：$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$。

其中 $\alpha = \frac{d}{D}$

3. 圆轴扭转破坏形式

对于像低碳钢这类塑性材料制成的圆轴沿横截面破坏。而对于像灰铸铁这类脆性材料制成的圆轴，沿与轴线成45°的螺旋面破坏。塑性材料往往呈现抗剪切能力比抗拉伸能力弱，脆性材料往往呈现抗拉伸能力比抗剪切能力弱。

扭转极限应力 $\tau_u = \begin{cases} \tau_s & \text{塑性} \\ \tau_b & \text{脆性} \end{cases}$

(1)强度条件：横截面上最大工作剪应力不得超过材料的许用剪应力：

$$\tau_{max} = \left(\frac{T}{W_p}\right)_{max} \leqslant [\tau]$$

对于等截面杆：$\frac{T_{max}}{W_p} \leqslant [\tau]$

(2)刚度条件：单位长度上最大扭转角 θ_{max} 小于等于许用扭转角 $[\theta]$：

$$\theta_{max} = \left(\frac{T}{GI_p}\right)_{max} \leqslant [\theta]$$

许用扭转角 $[\theta]$ 查设计标准或规范，工程常用单位换算：$1\text{rad/mm} = \frac{180}{\pi} \times 10^3 (°)/\text{m}$

4. 非圆截面杆扭转

非圆截面杆扭转时横截面不再保持为平面。但由于各横向线弯曲形状相同，因此横截面互相间没有对纵向变形的约束，即横截面上没有正应力，这种扭转称作自由扭转。

如果某个或某些横截面受到纵向变形的约束，横截面上会产生正应力。像这样横截面之间有纵向变形约束的扭转称为约束扭转。

对于矩形、椭圆等非圆截面杆，扭转最大扭转切应力与扭转变形分别为

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t}$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_t}$$

式中 W_t 及 I_t 均与截面形状及尺寸有关，其量纲与 W_p 及 I_p 相同。

5. 薄壁杆件的自由扭转

杆件横截面的壁厚远小于横截面的其他两个尺寸时，称为薄壁杆件，若杆件横截面中线有

一条不封闭的折线或曲线，称其为开口薄壁杆件；若横截面中线有一条封闭的折现或曲线，则成为闭口薄壁杆件。

(1)开口薄壁杆件

开口薄壁杆件的横截面积可以看作有若干狭长矩形截面组成，设扭转时各狭长矩形间的夹角不变，即整个横截面和组成截面的各部分的扭转角相同，都为 φ；横截面的扭矩 T_n 等于各组成部分扭矩的总和。

扭转变形 φ 与最大扭转切应力 τ_{max}

分别为：

$$\varphi=\frac{3Tl}{G\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3}$$

$$\tau_{max}=\frac{3T\delta_{max}}{\sum_{i=1}^{n}h_i\delta_i^3}$$

式中 h_i 和 $\delta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别代表各狭长矩形的长度和厚度。

整个横截面上最大切应力发生在厚度最大的矩形长边上。

(2)闭口薄壁杆件

闭口薄壁杆件限于单孔薄壁管型杆件。由于壁厚很小，近似认为切应力沿壁厚均布，横截面上形成切应力流。在横截面的任意点，切应力与壁厚的乘积(称为剪力流)等于常量。

横截面上任一点的切应力为：$\tau=\dfrac{T}{2A\delta}$

式中 δ 为横截面的厚度(δ 为常数时，为等厚截面)，A 为截面中线包围的面积。

截面的最大切应力发生在厚度最小处，即：$\tau_{max}=\dfrac{T}{2At_{min}}$

等厚度闭口薄壁杆件的扭转角为：$\varphi=\dfrac{Tl}{4GA^2}\oint\dfrac{ds}{\delta}=\dfrac{Tl}{GI_t}$ 其中 $I_t=\dfrac{4W^2}{\oint\dfrac{ds}{\delta}}$

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1)根据转速与功率计算轴所承受的外力偶矩；

(2)传动轴的切应力计算，包括实心圆轴及空心圆轴；

(3)圆轴表面的单元体分析，利用应变片测外力偶矩的相关计算；

(4)扭转圆轴和其他受力构件的组合结构计算；

(5)圆轴的扭转角计算。

【例 1】 如图 3-3 所示，圆轴受集度 m 的均布力偶作用，材料的剪切弹性模量是 G。求 B 截面相对与 A 截面的扭转角 φ_{BA}。(北方交通大学，2002 年)

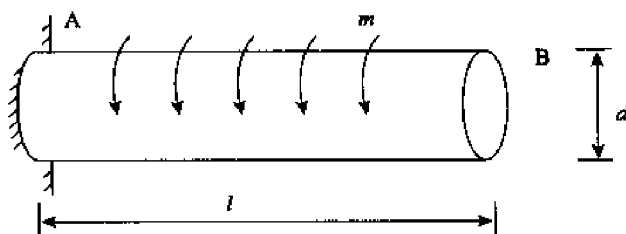


图 3-3

解 取坐标 x 如图 3-4 所示，

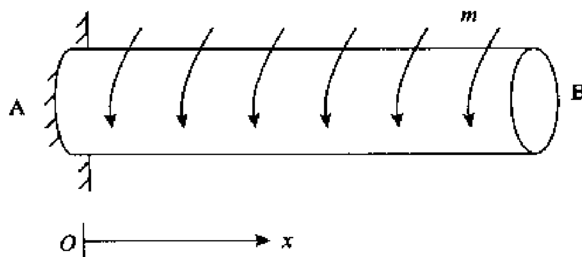


图 3-4

从圆轴上取出微段 dx 如图 3-5 所示，

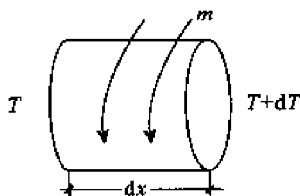


图 3-5

其相对转角是：$\mathrm{d}\varphi=\dfrac{T(x)\mathrm{d}x}{GI_{\mathrm{p}}}$

而根据平衡条件，$T(x)=m(l-x)$

B 截而相对与 A 截面的扭转角是，

$$\varphi_{\mathrm{BA}}=\int_0^l \frac{T(x)}{\mathrm{GI_p}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^l \frac{m(l-x)}{\mathrm{GI_p}}\cdot\mathrm{d}x=\frac{ml^2}{2\mathrm{GI_p}}=\frac{16ml^2}{\pi\mathrm{G}d^4}$$

评注：对于扭矩是随坐标变化的扭转问题，需要通过积分得到扭转变形量。

【例 2】 圆轴受力如图 3-6 所示，外直径是 D，孔直径 $d=D/2$，材料的剪切弹性模量是 G，长度 a 和力偶矩 M 已知。

(1)画轴的扭矩图

(2)求 E 截面扭转角

(3)求轴内最大剪应力 $\tau_{\max}$ 和最大正应力 $\sigma_{\max}$。(北京航空航天大学，2001 年)

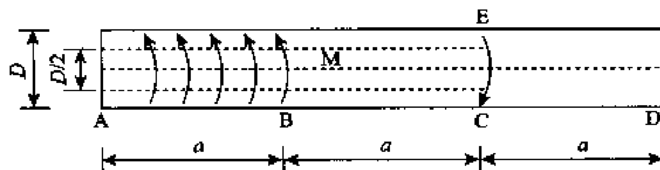


图 3-6

解 (1)扭矩图如图 3-7 所示。

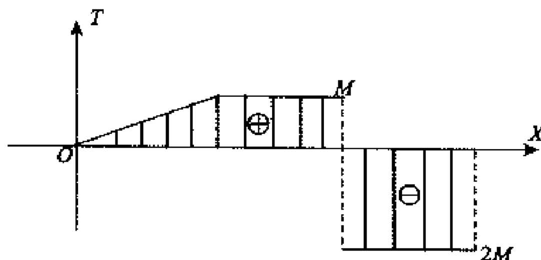


图 3-7

(2)$\varphi_{AD}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}+\varphi_{CD}$

$$=\int_0^a \frac{Mx}{GI_p}dx+\frac{Ma}{GI_p}+\frac{-2Ma}{GI_p}=\frac{Ma^2}{2GI_p}+\frac{Ma}{GI_p}+\frac{-2Ma}{GI_p}=\frac{-Ma}{GI_p}$$

$$=\frac{-Ma}{G\pi(D^4-d^4)/32}=-\frac{12.8Ma}{\pi GD^4}$$ (负号表示沿顺时针方向)

而 D 点固定,所以 E 截面扭转角是 $\varphi_E=\varphi_{AD}=-\frac{12.8Ma}{\pi GD^4}$

(3)最大剪应力是:

$$I_{max}=\frac{T_{max}}{W_p}=\frac{M}{I_p}\frac{D}{2}=\frac{M}{\frac{\pi}{32}D^3(1-\alpha^4)}=\frac{10.9M}{D^3}$$

其应力状态如图 3-8 以及图 3-9 所示。

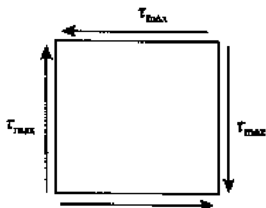


图 3-8

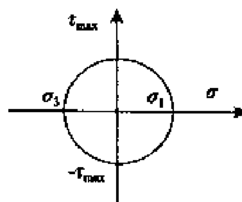


图 3-9

最大正应力是:$\sigma_1=\tau_{max}=\frac{10.9M}{D^3}$

评注:圆轴扭转时,各点处于纯剪应力状态,最大正应力方向与轴线成 45°,观察铸铁的扭转破坏实验不难观察到与轴线成 45°方向的拉伸断裂现象。

【例 3】 如图 3-10 所示,阶梯形圆轴,AB 段直径 $d_1=120$mm,BC 段直径 $d_2=100$mm。外力偶矩 $m_A=20$kN · m。

$m_B=34$kN · m,$m_C=14$kN · m。材料的许用剪应力是$[\tau]=80$MPa,剪变模量 G=80GPa。$L_1=1.5$m,$L_2=1$m,试校核该轴强度,并计算 C 截面相对 A 截面的扭转角 φ_{AL}。(东北大学,2002 年)

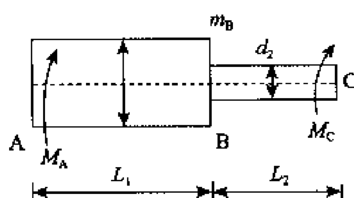


图 3-10

解 AB 段的最大剪应力是：$\tau_{max} = \dfrac{m_A}{W_p} = \dfrac{20 \times 10^3}{\frac{\pi}{16} \times 0.12^3} = 59(\text{MPa}) < [\tau]$

BC 段的最大剪应力是：$\tau_{max} = \dfrac{m_B}{W_p} = \dfrac{14 \times 10^3}{\frac{\pi}{16} \times 0.1^3} 71.3(\text{MPa}) < [\tau]$

由上，轴的强度满足要求

C 截面相对与 B 截面的转角是：

$$\varphi_{CB} = -\frac{m_C l_2}{GI_{p_2}} = -\frac{14 \times 10^3 \times 1}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times (0.1)^4} = -14.7 \times 10^3 (\text{rad})$$

B 截面相对与 A 截面的转角是：

$$\varphi_{BA} = \frac{m_A l_1}{GI_{p_1}} = \frac{20 \times 10^3 \times 1.5}{80 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times (0.12)^4} = 14.7 \times 10^3 (\text{rad})$$

C 截面相对与 A 截面的转角是：

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 0$$

评注：对各相对扭转角叠加时要注意方向，将不同的方向用正负号区分开是十分必要的。扭转角的正负号规定可以参照扭矩的正负号规定。

【例 4】 如图 3-11 所示，直径为 d 的圆轴，两端受扭矩 M 的作用，有试验测得与轴线成 45°方向有线应变 $\varepsilon_{45°}$。已知材料的弹性模量是 E，泊松比 μ，求 M 的表达式。（北方交通大学）

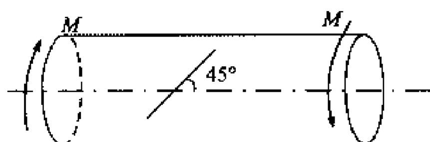


图 3-11

解 圆轴外表面的应力状态如图 3-12 所示，

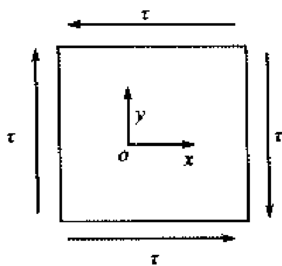


图 3-12

那么：

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\times45^\circ)-\tau_{xy}(2\times45^\circ)=-\tau$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos\left(2\times(-45^\circ)\right)-\tau_{xy}\sin(2\times(-45^\circ))=\tau$$

由广义胡克定律，

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{E}(\sigma_{45^\circ}-\nu\sigma_{-45^\circ})=-\frac{1+\mu}{E}\tau \qquad ①$$

而扭转剪应力是，

$$\tau=\frac{M}{W_p}=\frac{M}{\frac{\pi}{16}d^3} \qquad ②$$

联合上面两式得：$M=-\frac{E\pi d^3}{16(1+\mu)}\varepsilon_{45^\circ}$

评注：本题也可以借助应力圆来获得各方向的应力值，读者可以尝试。

【例 5】 如图 3-13 所示，传动轴的转速 $n=600\text{r/min}$，主动轮 2 输入功率 $N_2=350\text{kW}$，从动轮 1，3，4 分别输出 $N_1=100\text{kW}$，$N_3=130\text{kW}$，$N_4=120\text{kW}$。已知$[\tau]=60\text{MPa}$，$[\varphi]=1(^\circ)/\text{m}$，$G=80\text{GPa}$，试画出该传动轴的扭矩图，并确定该等直径传动轴的直径。（上海大学，2000 年）

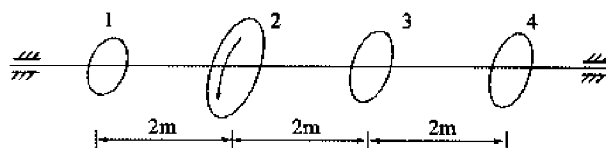


图 3-13

解 根据功率和扭矩之间的关系得到，

$$T_1=\frac{N_1}{n}=\frac{100}{(600\times2\pi)/60}=1.59(\text{kN}\cdot\text{m})$$

$$T_2=\frac{N_2}{n}=\frac{350}{(600\times2\pi)/60}=5.57(\text{kN}\cdot\text{m})$$

$$T_3=\frac{N_3}{n}=\frac{130}{(600\times2\pi)/60}=2.07(\text{kN}\cdot\text{m})$$

$$T_4=\frac{N_4}{n}=\frac{120}{(600\times2\pi)/60}=1.91(\text{kN}\cdot\text{m})$$

扭矩图由图 3-14 所示，

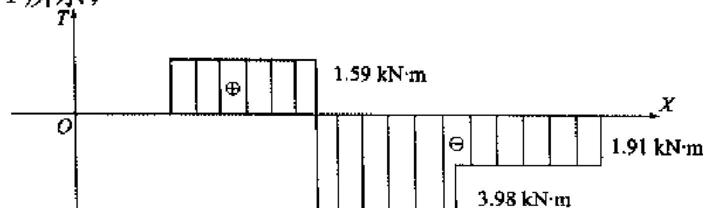


图 3-14

轴上的最大剪应力是：$\tau_{max}=\dfrac{T_{max}}{W_p}=\dfrac{3.98\times10^3}{\frac{1}{16}\pi d^3}\leqslant[\tau]=60\times10^6$

得到 $d\geqslant7\text{cm}$。

而轴上单位长度的最大扭转角是，

$$\varphi_{max}=\frac{T_{max}}{GI_p}=\frac{3.98\times10^3}{80\times10^9\times\frac{\pi}{32}\cdot d^4}[\varphi]=1((°)/\text{m})=0.017(\text{rad/m})$$

得到 $d\geqslant7.39\text{cm}$，故该轴直径 d 不应小于 7.39cm。

评注：读者从本题中应掌握以下内容：① 功率和扭矩之间的转化关系；② 强度条件的校核；③ 刚度条件的校核。这类考题在以往研究生入学考试中非常常见。

【例 6】 如图 3-15 所示，受扭转力偶作用的圆截面杆，长 $L=1\text{m}$，直径 $d=20\text{mm}$，材料的剪切弹性模量 G，两端截而的相对扭转角 $\varphi=0.1\text{rad}$。试求此杆外表而任意点的剪应变、横截面上的最大剪应力和外力偶矩。（北京航空航天大学，2002 年）

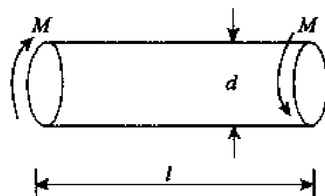


图 3-15

解 由扭转角公式：$\varphi=\dfrac{Ml}{GI_p}=0.1(\text{rad})$

得到外加力偶矩：$M=\dfrac{GI_p\varphi}{l}=125.6(\text{N}\cdot\text{m})$

横截面上的最大剪应力是：$I_{max}=\dfrac{M}{W_p}=\dfrac{125.6}{\frac{\pi}{16}\times(0.02)^3}=80\text{MPa}$

杆外表面任意点的剪应变是：$\gamma=\dfrac{\tau_{max}}{G}=\dfrac{80\times10^6}{80\times10^9}=0.001\text{ rad}$

评注：本题考查基本公式的计算，读者对各相关公式要十分熟悉。

【例 7】 如图 3-16 所示两端固定的阶梯圆轴，C 上受扭转力偶矩 M_C 的作用。已知 $D_1=7\text{cm}$，$D_2=5\text{cm}$，$[\tau]=60\text{MPa}$，试求最大的扭转力偶矩 M_C。（华中科技大学，2002 年）

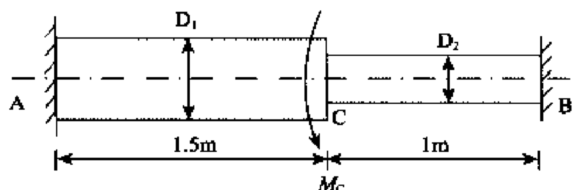


图 3-16

解 设 A 端的扭矩是 M_A，B 端的扭矩是 M_B，则对阶梯圆轴的受力分析如图 3-17 所示，

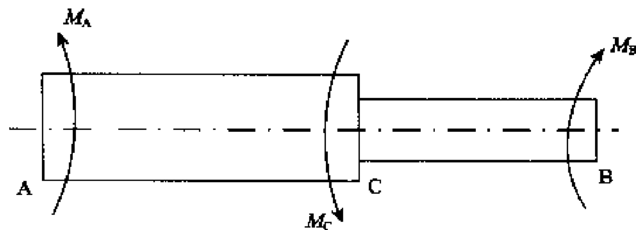


图 3-17

由平衡条件 $\sum M=0$ 得到：$M_A+M_B=M_C$ ①

设 A 端相于与 C 端的扭转角是 θ_{AC}，C 端相对于 B 端的扭转角是 θ_{CB}，则由于 A、B 两端固定得到变形协调条件，

即：
$$\theta_{AC}+\theta_{CB}=\theta_{AB}=0 \quad ②$$

由物理条件，

$$\theta_{AC}=\frac{M_A\cdot 1.5}{G\cdot\frac{\pi}{32}\cdot D_1^4} \quad ③$$

$$\theta_{CB}=-\frac{M_B\cdot 1}{G\cdot\frac{\pi}{32}\cdot D_2^4} \quad ④$$

联合①②③④解出，$M_A=0.72M_C$，$M_B=0.28M_C$

AC 段的最大剪应力是，

$$\tau_{max}=\frac{M_A}{W_p}=\frac{0.72M_C}{\frac{\pi}{16}\cdot(0.07)^3}=[\tau]=60\times10^6(\text{Pa})$$

$M_C\leqslant 5.6\times10^3(\text{N}\cdot\text{m})$

BC 段的最大剪应力是，

$$\tau_{max}=\frac{M_B}{W'_p}=\frac{0.28M_C}{\frac{\pi}{16}\cdot(0.05)^3}\leqslant[\tau]=60\times10^6(\text{Pa})$$

$M_C\leqslant 5.3\times10^3(\text{N}\cdot\text{m})$

综合以上，$M_C\leqslant 5.3\times10^3(\text{N}\cdot\text{m})$，即最大扭转力偶矩是 $5.3\times10^3(\text{N}\cdot\text{m})$

评注：本题是一次超静定的扭转问题，关键是建立变形协调条件②。

【例 8】 如图 3-18 所示受扭圆杆，由两个横截面和一个过轴线的水平纵向截面截取隔离体如图所示。试问纵截固 ABCD 上的剪应力所形成的力偶将由哪个力偶来平衡？（复旦大学，1999 年）

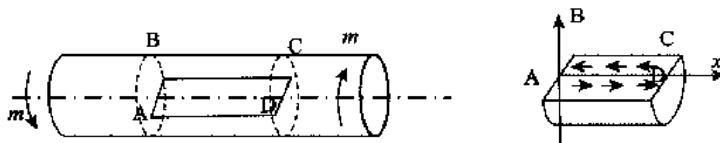


图 3-18

在纵截面 ABCD 上取微元如图 3-19 所示，

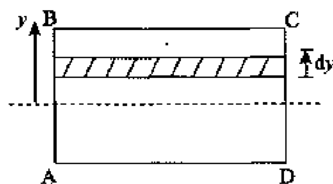


图 3-19

微元上的合剪力是：$dQ = \tau \cdot l \cdot dy = \frac{m}{I_P} \cdot y \cdot l \cdot dy$

微元的合剪力对轴的力偶矩是：$dT = dQ \cdot y = \frac{m}{I_P} \cdot y^2 \cdot l \cdot dy$

纵截面上剪应力形成的合力偶矩是：

$$T = \int dT = \int_{-R}^{R} \frac{m}{I_P} \cdot y^2 \cdot l \cdot dy = \frac{2mlR^3}{3I_P} \qquad ①$$

在横截面上取微元如图 3-20 所示

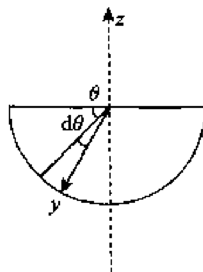


图 3-20

微元的合剪力是：$dQ = \tau \cdot y \cdot d\theta \cdot dy$

其水平分量是：$dQ \cdot \sin\theta = \tau \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot y \cdot dy$

横截面上合剪力的水平分量是：

$$F = \int_0^{\pi}\int_0^{R} \tau \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot y \cdot dy = \int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{m}{I_P} \cdot y \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot y \cdot dy = \frac{2m}{3I_P} \cdot R^3$$

题图中隔离体，左、右两横截面上水平剪力对轴形成的力偶矩是：

$$T' = Fl = \frac{2mlR^3}{3I_P} \qquad ②$$

比较①②两式发现水平纵截面上的剪应力的合力偶矩将由左右两截面上合剪力的水平分量形成的力偶矩来平衡。

评注：对微元体的分析不仅是材料力学中的重要内容，而且是弹性力学课程的基础内容，读者要加深对微元体的理解，并形成独立的分析能力。本题中应用到了剪应力互等定理，读者要熟练掌握。

【例 9】 如图 3-21 所示，半径为 R 的圆截面杆，左端固定，右端受力偶 m 作用而扭转，杆材料的 $\tau-r$ 曲线图中，τ_s 是剪切流动极限，该半径为 r_s 以内的杆中心部分为弹性，r_s 以外部分已屈服。

(1)试写出决定 r_s 的方程(不必解出);

(2)设 r_s 已知,求 B 端的扭转角;

(3)撤去力偶 m 后,B 端尚残留扭转角若干?(天津大学,2000 年)

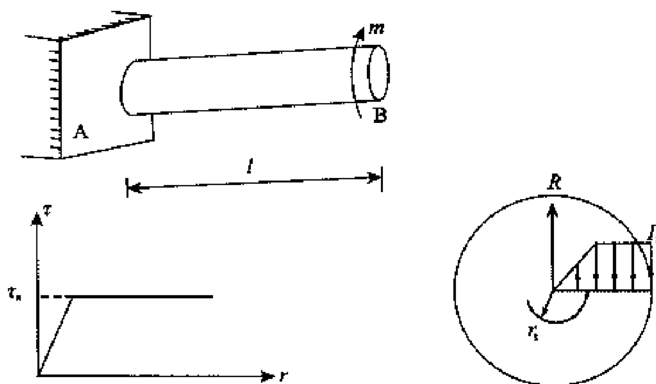


图 3-21

解 (1)将题中弹塑性区域分解成弹性区 A_1 和塑性区 A_2 两部分。弹性区 A_1 中的剪应力所形成的扭矩是:

$$T_1=\int_{A_1}\tau(P)\cdot\rho\cdot \mathrm{dA}=\int_0^{r_s}\frac{\tau_s}{r_s}\cdot x\cdot 2\pi x\cdot \mathrm{d}x\cdot x=\frac{\pi}{2}\cdot\tau_s\cdot r_s^3 \qquad ①$$

塑性区 A_2 中的剪应力所形成的扭矩是:

$$T_2=\int_{A_2}\tau(P)\cdot\rho\cdot \mathrm{dA}=\int_{r_s}^{R}\tau_s\cdot 2\pi x\cdot \mathrm{d}x\cdot x=\frac{2}{3}\pi\tau_s(R^3-r_s^3) \qquad ②$$

而 $T_1+T_2=m$ ③

联合①②③式得到决定 r_s 的方程是:$\frac{\pi}{2}\cdot\tau_s\cdot r_s^3+\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot\tau_s\cdot(R^3-r_s^3)=m$

由 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{T}{\mathrm{GI_P}}=\frac{1}{\mathrm{G}}\cdot\frac{T}{\mathrm{I_P}}\cdot r_s\cdot\frac{1}{r_s}=\frac{1}{\mathrm{G}}\cdot\tau_s\cdot\frac{1}{r_s}$

得到 B 端的扭转角是:$\varphi_B=\varphi_{BA}=l\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{\tau_s l}{\mathrm{G}r_s}$

(注,推导过程中的极惯性矩 $\mathrm{I_P}$ 是弹性区域的极惯性矩)

(3)撤去力偶 m 后,圆杆发生弹性卸载变形的是,

$$\varphi'_B=\frac{ml}{\mathrm{GI_P}}=\frac{ml}{\mathrm{G}\cdot\frac{\pi}{32}(2R)^4}=\frac{2ml}{\mathrm{G}\cdot\pi\cdot R^4}$$

因此 B 端的残留扭转角是,

$$\varphi''_B=\varphi_B-\varphi'_B=\frac{\tau_s l}{\mathrm{G}r_s}-\frac{2ml}{\mathrm{G}\cdot\pi\cdot R^4}$$

评注:通过本题,读者应掌握以下内容:① 理想弹塑性的概念;② 塑性区对构件刚度无贡献,可以在变形协调条件允许下无限变形;③ 卸载过程始终是弹性的。

第三节 习 题

一、简答题

1. 实心轴和空心轴，横截面积相等，受相同扭矩时，试比较两轴的最大剪切应力。（长安大学 2001 年）

二、填空题

1. 等截面实心圆轴，当两端作用 M_c 的扭矩时开始屈服。若将其横截面积增大一倍，圆轴屈服时的扭矩是_______。

2. 若长为 L，直径为 d 的受扭圆轴两端截面间的扭转角是 ϕ，材料的剪切模量为 G，则圆轴的最大剪切应力是_______。（西安建筑科技大学 2000 年）

3. 圆轴横截面上某点剪切力 τ_ρ 的大小与该点到圆心的距离 ρ 成正比，方向垂直于过该点的半径。这一结论是根据_______推知的。

4. 一根空心轴的内、外径分别为 d、D。当 $D=2d$ 时，其抗扭截面模量为_______。

5. 设直径为 d、D 的两个实心圆截面，其惯性矩分别为 $I_P(d)$ 和 $I_P(D)$、抗扭截面模量分别为 $W_p(d)$ 和 $W_p(D)$。则内、外径分别为 d、D 的空心圆截面的极惯性矩 I_P 和抗扭截面模量 W_p 分别为_______。

6. 当实心圆轴的直径增加一倍时，其抗扭强度、抗扭刚度分别增加到原来的_______倍。

三、选择题

1. 矩形截面受扭时，横截面的最大剪切应力发生在_______。（中南大学 2003 年）

   A. 长边中点　　B. 短边中点　　C. 角点　　D. 周边各点

2. 一内外径比为 α 的空心圆轴，当两端受扭时，横截面的最大剪切应力是 τ，则内圆周处的剪切应力是_______。（重庆大学 2003 年）

   A. τ　　B. $\alpha\tau$　　C. $(1-\alpha^3)\tau$　　D. $(1-\alpha^4)\tau$

3. 圆轴直径为 d，受外力偶矩扭转作用如图 3-22 所示。已知 $T_1=3T$，$T_2=7T$，$T_3=4T$，材料的切变模量为 G。C 截面相对 A 截面的扭转角是_______。

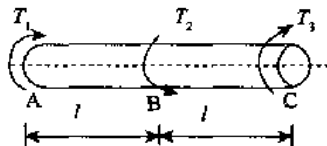


图 3-22

A. $\phi_{AC}=\phi_{AB}+\phi_{BC}=-\dfrac{32Tl}{G\pi d^4}$　　B. $\phi_{AC}=-\phi_{AB}+\phi_{BC}=-\dfrac{224Tl}{G\pi d^4}$

C. $\phi_{AC}=\phi_{AB}-\phi_{BC}=\dfrac{224Tl}{G\pi d^4}$　　D. $\phi_{AC}=-\phi_{AB}-\phi_{BC}=\dfrac{224Tl}{G\pi d^4}$

4. 对于受扭构件，关于下面结论正确的是_______。

(1)最大剪应力只出现在横截面上；

(2)在横截面上和包含杆件轴线的纵向截面上均无正应力；

(3)圆轴内最大拉应力的值和最大剪应力的值相等。

A. (2)、(3)　　B. (1)、(3)　　C. (1)、(2)　　D. 全对

5. 电动机传动轴横截面上扭矩与传动轴的(　　)成正比。

A. 传递功率 P　　B. 转速 n　　C. 直径 D　　D. 剪切弹性模量 G

四、判断题

1. 设受扭圆轴中的最大切应力为 τ，则最大正应力出现在 45°斜截面上，其值为 τ。(　　)
2. 铸铁试件扭转破坏是沿横截面剪断。(　　)
3. 非圆截面杆约束扭转时，横截面上既有正应力，也有切应力。(　　)

五、计算题

1. 一实心圆轴发生扭转变形，其直径为 8cm，钢材的剪切弹性模量 G=80GPa，要求在 1.5m 长度内的扭转角不允许超过 1°，试求该轴的允许剪应力。

2. 两端直径为 d_1=40mm，d_2=80mm，长度为 l=1m 的锥形圆杆，与外径 d=120mm、中间具有相同圆锥形孔的空心圆杆配合，构成组合轴，如图 3-23 所示。组合轴受力偶矩 m=5kN·m 作用。设两杆接触面黏牢不发生相对转动，并且两杆的剪切弹性 模量之比 $G_1/G_2=1/2$，试求实心锥形圆杆内的最大剪应力。

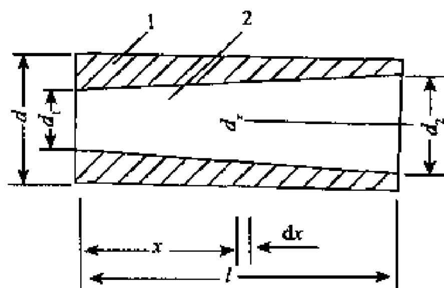


图 3-23

3. 皮带轮传动轴如图 3-24 所示，皮带轮 1 的重量 $W_1=800$N，直径 $d_1=0.8$m，皮带轮 2 的重量 $W_2=1200$N，直径 $d_2=1$m，皮带的紧边拉力为松边拉力的 2 倍，轴传递功率为 100kW，转速为每分钟 200 转。轴材料为 45 钢，$[\sigma]=80$MPa，试求轴的直径。

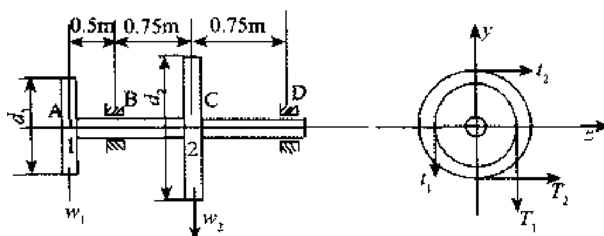


图 3-24

4. 有三根轴横截面面积、杆长和材料均相同，截面形状分别为圆形 1、正方形 2 和 $h/b=2$ 的矩形 3，试比较它们的抗扭刚度。

第 4 章 弯曲内力

知识要点

本章主要介绍了杆件弯曲内力的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)受弯杆件的简化；

(2)剪力和弯矩；

(3)剪力方程和弯矩方程；

(4)剪力图和弯矩图；

(5)载荷集度、剪力和弯矩间的微分关系；

(6)刚架与曲杆的内力。

第一节 本章内容总结

1. 基本概念

弯曲变形：杆件在垂直于其轴线的载荷作用下，使原为直线的轴线变为曲线的变形。通常将承受弯曲变形的杆件称为梁。

对称弯曲：梁的每一个横截面至少有一根对称轴，这些对称轴构成对称面。所有外力都作用在其对称面内时，梁弯曲变形后的轴线将是位于这个对称面内的一条曲线，这种弯曲形式称为对称弯曲。

静定梁：梁的所有支座反力均可由静力平衡方程确定。静定梁的基本形式有：

(1)简支梁：一端为固定铰支座，而另一端为可动铰支座的梁。

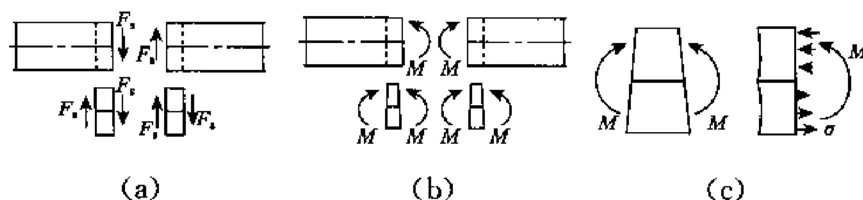
(2)悬臂梁：一端为固定端，另一端为自由端的梁。

(3)外伸梁：简支梁的一端或两端伸出支座之外的梁。

2. 梁的内力 剪力与弯矩

横截面上的弯矩，其值等于作用在该横截面任一侧梁上的外力向截面形心取矩的代数和。在求解弯曲内力时，无论以截面的哪一侧部分为分离体，在所取截面处都加正向剪力、弯矩，这样根据平衡条件计算它们的大小，所得的正负号就是内力的正负号。

剪力、弯矩的正负号规定：使梁产生顺时针转动的剪力规定为正，反之为负，如图 4-1a 所示；使梁的下部产生拉伸而上部产生压缩的弯矩规定为正，反之为负，如图 4-1b 所示。弯矩符号另一定义：使横截面顶部受压为正，反之为负，如图 4-1c 所示。



(a)　　　　(b)　　　　(c)

图 4-1

3. 剪力图与弯矩图

梁在外力作用下，不同截面内力一般是不同的，随截面位置的变化而变化，描述这种变化的数学表达式几何方程，分别称为剪力方程和弯矩方程。

由于载荷的变化及约束的影响，整个梁上各截面的剪力和弯矩有时不能由一个函数描述，这样就要分段加以考虑，分段点在外力有突变的截面处。

同作轴力图、扭矩图类似，将剪力方程、弯矩方程用图形表示出来，即得到剪力图、弯矩图。

由图可形象直观地反映出剪力、弯矩随截面位置的变化情况以及梁的最大剪力与最大弯矩所在的位置、大小，为梁的强度计算奠定了基础。

4. 载荷集度、剪力及弯矩间的微分关系

考查如图 4-2 所示承受任意载荷的梁。从梁上受分布载荷的段内截取 $\mathrm{d}x$ 微段，其作用在微段上的分布载荷可以认为是均布的，并设向上为正。

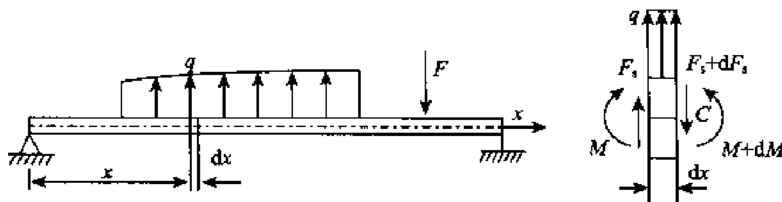


图 4-2

微段两侧截面上的内力均设为正方向。因为梁整体是平衡的，$\mathrm{d}x$ 微段也应处于平衡。根据平衡条件 $\sum y=0$ 和 $\sum m_o=0$，由微段满足平衡条件，略去高阶微量，化简后得：

$$\frac{\mathrm{d}F_{s_y}(x)}{\mathrm{d}x}=-q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}M_z(x)}{\mathrm{d}x}=-F_{s_y}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}M_z^2}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}F_{s_y}}{\mathrm{d}x}=q(x)$$

根据上述剪力、弯矩和分布载荷集度 q 之间的平衡微分关系，可知：

(1)剪力图上某处的斜率等于梁在该处的分布载荷集度 q 。

(2)弯矩图上某处的斜率等于梁在该处的剪力。

(3)弯矩图上某处的斜率变化率等于梁在该处的分布载荷集度 q 。

线性与外载关系图总结如下图 4-3 所示。

q	$q(x)=0$	$q(x)=c<0$	$q(x)=c>0$	$q(x)=ax+b>0$ ($a>0$)	$q(x)=ax+b>0$ ($a<0$)
F_s				2 次凹曲线	2 次凸曲线
M 图	直线	2 次凸曲线 (伞)	2 次凹曲线 (伞)	3 次凹曲线 (伞)	3 次凹曲线 (伞)

图 4-3

这种关系对于梁的内力分析、作内力图以及建立梁的切应力计算公式都有重要意义：

(1)若 q 为零(无分布载荷)，剪力图将为水平线，而弯矩图则为斜直线；

(2)若 q 图为水平线(均布载荷)，则剪力图为斜直线，而弯矩图为二次曲线；

(3)当 q 指向上方时，q 值为正，弯矩图图线将凹向上；

(4)当 q 指向下方时，q 值为负，弯矩图线将将凹向下；

(5)在剪力值为零的截面，弯矩有极值；

(6)集中力作用截面，剪力图有突变，突变值等于集中力的值，弯矩图上有折点；

(7)集中力偶作用截面，弯矩图有突变，突变值等于集中力偶的值，剪力图连续。

5. 刚架与曲杆的内力

(1)刚架：用刚性接头连接的杆系结构称为刚架，所谓的刚性接头包含如下力学性质：

约束——限制相连杆截面间的相对线位移与角位移；

受力——既可传递力，也可传递力偶矩。

(2)曲杆：在未受力时轴线为曲线的杆件称为曲杆。

平面刚架及曲杆横截面的内力一般有三个：轴力、剪力和弯矩。轴力以拉力为正，压力为负。剪力的符号规则和直梁相同；弯矩的正负不作规定，但同一结构体系中需要统一，通常规定把弯矩图画在杆件受压的一侧，与坐标方向无关，画轴力图和剪力图时只需要标明正负即可。

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1)根据梁受力与支撑情况求截面的剪力与弯矩；

(2)写梁的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图与弯矩图；

(3)根据梁的内力图求其受力与支撑情况。

【例 1】 画出下列(图 4-4)各梁的剪力图和弯矩图。(华东理工大学，2002 年)

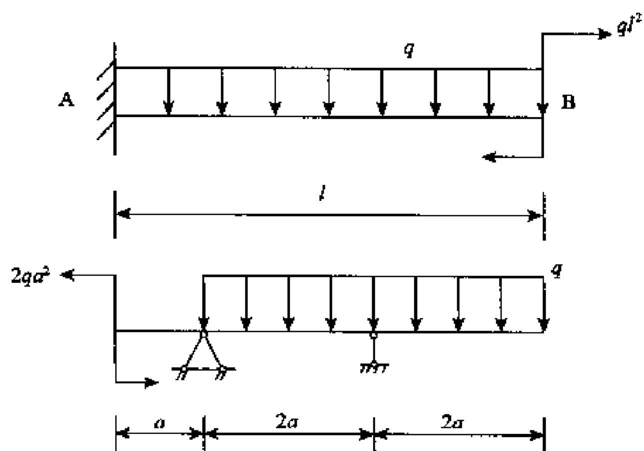


图 4-4

解 题中各梁的剪力图如图 4-5 所示，

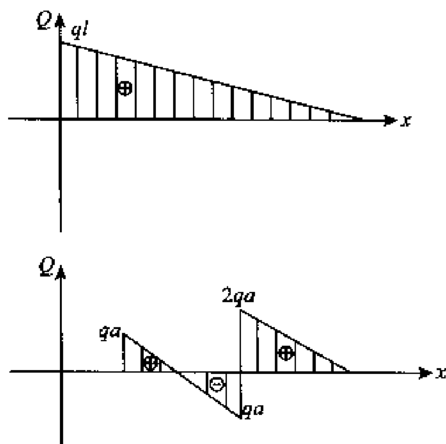


图 4-5

题中各梁的弯矩图如图 4-6 所示，

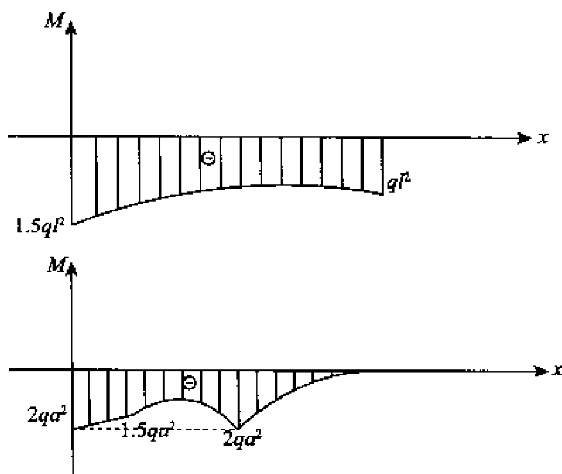


图 4-6

评注：简易法作内力图有以下步骤：① 求梁中各支座的支反力；② 求出各区段的起点、终点的剪力值和弯矩值；③ 根据各区段的荷载状况，连线形成剪力图和弯矩图。

评注：通过本例题读者应注意以下几点：① 梁上分布荷载是均布时，Q 图是斜直线；②集中力作用处，Q 图有突变，突变量等于集中力的值；③ 均布荷载作用下的 M 图是抛物线；④ 集中力作用处，M 图有拐点，两边斜率不同。⑤ 集中力偶作用处，M 图有突变，突变量等于集中力偶的值。

【例 2】 做如图 4-7 所示梁的 Q、M 图。（河海大学，2002 年）

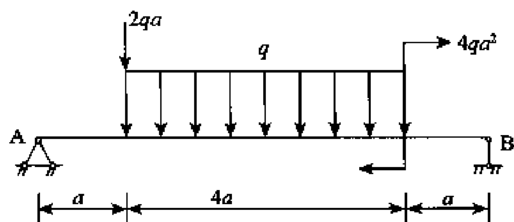


图 4-7

解 令 A 端和 B 端的支反力分别是 F_A 和 F_B，则根据平衡条件 $\sum F=0$ 和 $\sum M_A=0$ 得到

$$\begin{cases} F_A + F_B = 2qa + 4qa = 6qa & ① \\ 2qa^2 + 4qa^2 + 12qa^2 - F_B \cdot 6a = 0 & ② \end{cases}$$

联合①②式得到 $F_A=3qa$，$F_B=3qa$

作梁的剪力图如下：

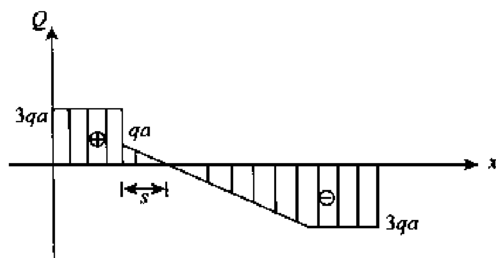


图 4-8

剪力为零处弯矩有极值，如上述剪力图，该位置是，

$$S = \frac{qa}{q} = a$$

该处的弯矩极值是，

$$M_{max} = 3qa \cdot 2a - 2qa \cdot a - \frac{1}{2}qa^2 = 3.5qa^2$$

则梁的弯矩图如下：

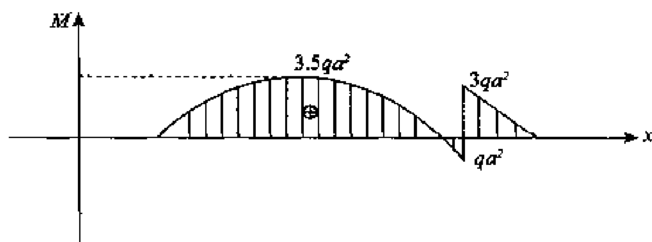


图 4-9

【例 3】 欲用钢索起吊一根自重为 q(均布全梁)长度为 l 的等截面梁,如图 4-10 所示,吊点位置 x 应是多少才最合理?(大连理工大学,2001 年)

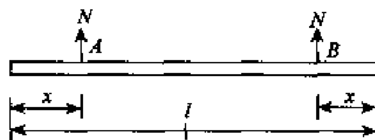


图 4-10

解 设钢索系在距端点 x 处,受力如图 4-11。钢索的张力的垂直分量 N 由平衡方程得:$N=ql/2$

作弯矩图如图 4-12 所示,

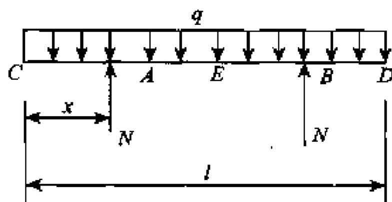


图 4-11

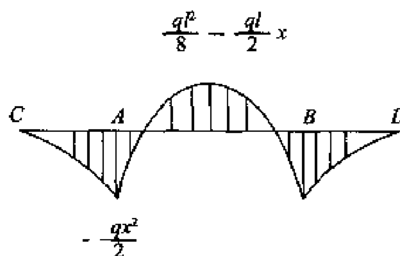


图 4-12

AB 段:距 C 点为 y 的截面上的弯矩由均布载荷 q 产生的弯矩和集中力 N 产生的弯矩之和组成:

$$M(y)=\frac{1}{2}qy^2+\frac{ql}{2}(y-x) \qquad (x<y\leqslant 1-x)$$

在 AB 段的中点 E,弯矩达到最大。

CA 段:距 C 点为 y 截面弯矩:

$$M(y)=-\frac{1}{2}qy^2\,(0\leqslant y\leqslant x)$$

$$M_E=\frac{ql^2}{8}-\frac{ql}{2}x$$

BD 段与 CA 段相同。

从弯矩图可知,当钢索系某处,使 A 点的弯矩与 E 点的弯矩大小相等,方向相反时,才是合

理的位置，即

$$\frac{1}{2}qx^2=\frac{ql^2}{8}-\frac{ql}{2}x$$

求解此方程得，

$$x=\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2})l$$

x 应取正值，钢索应系的位置 $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}l$ 处。

【例 4】 已知梁的剪力图如图 4-13 所示，试作出此梁的荷载图（包括支座）和弯矩图，并说明各特征点值。（注：梁上无集中力偶作用）

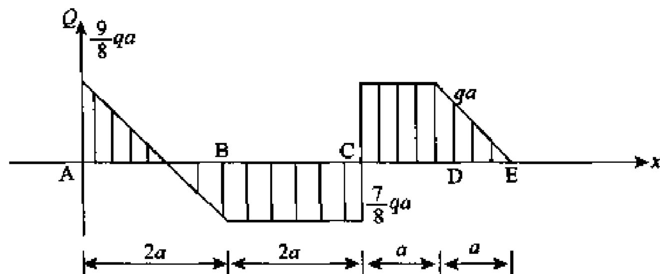


图 4-13

解 对梁的载荷分析如下：

已给定剪力图，从载荷与剪力，弯矩与剪力间关系有：

$$q=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}\qquad M(x)=\int_0^x Q(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$$

作载荷图和弯矩图：

①点 A 剪力图向上突变，突变量是 $\frac{9}{8}qa$，所以 A 点有向上的集中力作用，大小是 $\frac{9}{8}qa$；

②AB 区段的剪力图是斜直线，斜率是 $\bar{q}=\frac{Q_B-Q_A}{2a}=\frac{-\frac{7}{8}qa-\frac{9}{8}qa}{2a}$，即 $-q$，因此该区段有向下的均布荷载是 q；

③BC 区段剪力图上可知，剪力为常数，导数为零，剪力图是一条水平直线，其上没有荷载作用；

④C 点的剪力图有向上突变，突变量是 $\frac{15}{8}qa$，即有向上的集中力作用，大小是 $\frac{15}{8}qa$；

⑤CD 区段同 BC 区段，其上没有荷载作用；

⑥DE 区段同 AB 区段，作用载荷：

$$\bar{q}=\frac{0-qa}{a}=-q$$

即其上有向下的均布荷载 q 作用。

综合以上，梁的荷载图如图 4-14 所示，

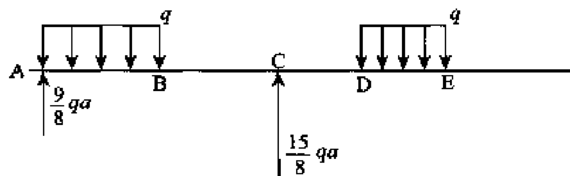


图 4-14

从上述荷载图中容易获得梁的弯矩如下：

①$M_A=0, M_B=\frac{9}{8}qa\cdot 2a-\frac{1}{2}q(2a)^2=\frac{1}{4}qa^2$，AB 之间是抛物线。令零剪力处 F 离 A 点距离是 x，则根据剪力图中几何关系，$x=\frac{\frac{9}{8}qa}{q}=\frac{9}{8}a$，$M_F=\frac{9}{8}qa\cdot\frac{9}{8}a-q\cdot\frac{9}{8}a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}a=\frac{81}{128}qa^2$；

② $M_C=\frac{9}{8}qa\cdot 4a-q\cdot 2a\cdot 3a=-\frac{3}{2}qa^2$，BC 之间是斜直线；

③ $M_D=-qa\cdot\frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}qa^2$，CD 之间是斜直线；

④$M_E=0$，DE 之间是抛物线；

综合以上，梁的弯矩图如图 4-15 所示。

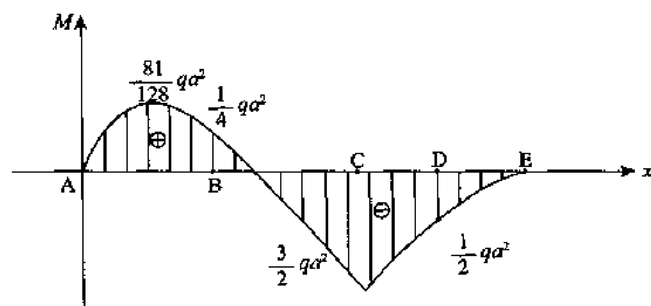


图 4-15

【例 5】 外伸梁受力如图 4-16 所示，试画出该梁的剪力图和弯矩图。

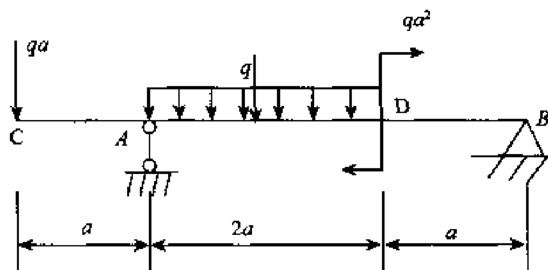


图 4-16

解 首先求支反力，在求反力过程中，均布载荷可以用等效力系代替，支座 A、B 的支反力为 R_A、R_B，梁受力简图如图 4-17。

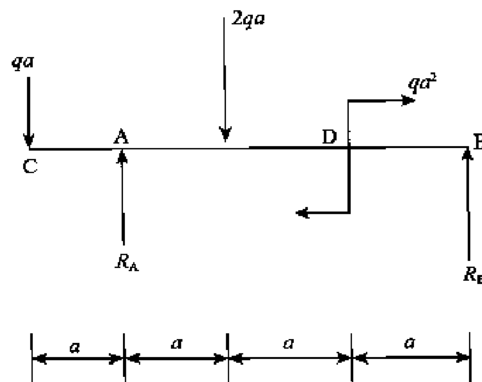


图 4-17

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot 3a - qa \cdot 4a - 2qa \cdot 2a + qa^2 = 0$$

$$R_A = \frac{7}{3}qa$$

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 3a - qa^2 - 2qa \cdot a + qa \cdot a = 0$$

$$R_B = \frac{2qa}{3}$$

(1)剪力图

CA 段:此段中间无任何载荷,仅在端点 C 有集中力作用,方向为负。在这段各截面的剪力为常数,剪力图上为一水平线,大小为$-qa$。

AD 段:载荷为均布的,且为负,因此剪力为一斜率为负的直线。A 点有向上的集中力作用,剪力图上有一跳跃,其跳跃大小为 R_a,A 点左侧为$-qa$,右侧为 $4qa/3$。D 点截面上的剪力为其左侧梁所有载荷之和,大小为$-2qa/3$。过 A 点右侧点剪力和 D 点剪力作直线即成。

DB 段:中间无任何载荷,剪力不变。剪力图上为一大小为$-2qa/3$ 的水平线。剪力图如图 4-18。

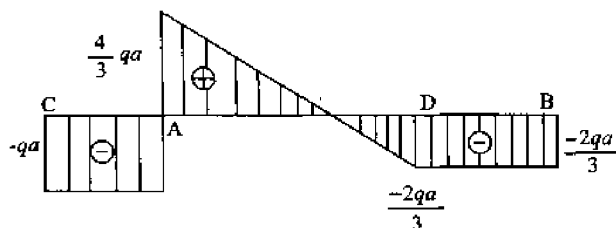


图 4-18

(2)弯矩图

CA 段:仅有集中力 qa 产生弯矩,C 点无弯矩,弯矩为零。弯矩 $M(x)$与 C 点的距离成正比的直线,C 点为零,A 点为$-qa^2$。

AD 段:载荷为均布,且向下,产生负弯矩。距 A 点为 x 的截面上的弯矩,由 A 截面的弯矩$-qa^2$,A 点右侧剪力 $4qa/3$ 产生的弯矩,以及均布载荷$-q$ 产生的弯矩之和组成,即

$$-qa^2 + \frac{3}{4}qax - \frac{q}{2}x^2$$

弯矩图为一抛物线,且向下凹,到 D 点 $x=2a$,弯矩

$$M_D = -\frac{qa^2}{3}$$

在矩 A 点 $4a/3$ 处，弯矩达到抛物线的顶点，弯矩 $M = -qa^2/9$。

DB 段：在 D 点有集中弯矩作用，故有一跳跃，其值为 qa^2，因此 D 点右侧弯矩为 $2qa^2/3$。此段中间无任何载荷作用，弯矩图为直线，B 点的弯矩为零。

弯矩如图 4-19 所示。

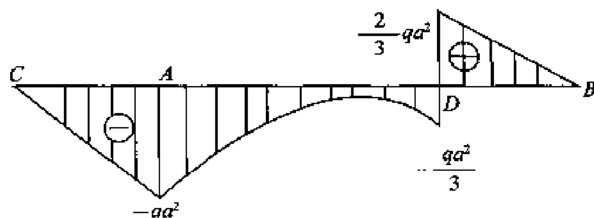


图 4-19

第三节　习　题

一、填空题

1. 作杆段的弯矩图时，只要求出杆段的杆端弯矩，并将杆端弯矩作为荷载，用________作相应的简支梁的弯矩图即可。

2. 铸铁梁受弯曲时，梁横截面的中性轴一般应设计成不对称，其形心位置应偏向________一侧更为合理。(西安电子科技大学，2000 年)

3. 若平面图形对某一对坐标轴的惯性矩等于零，那么这对坐标轴称为________轴。

二、选择题

1. 简支梁的弯曲刚度 EI 是常数，长 L，左右两支撑端分别受顺时针的力偶矩 M_1 和 M_2 作用，今欲使梁的挠曲线在离左端 $L/3$ 处出现一拐点，则 M_1/M_2 为________。(西安建筑科技大学，2000 年)

A. 2　　　B. 3　　　C. 1/2　　　D. 1/3

2. 如图 4-20 所示，截面(阴影部分被挖去)对 x、y 轴的惯性矩是________。

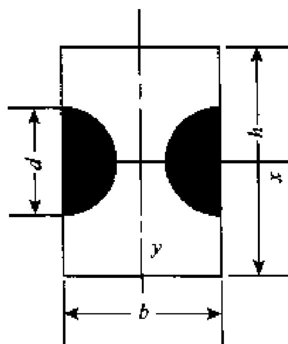


图 4-20

A. $I_x=\frac{bh^3}{6}-\frac{\pi d^4}{32}, I_y=\frac{hb^3}{6}-\frac{\pi d^4}{32}$

B. $I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{\pi d^4}{64}, I_y=\frac{hb^3}{12}-\frac{\pi d^4}{64}-\frac{\pi b^2 d^2}{16}+\frac{bd^3}{6}$

C. $I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{\pi d^4}{32}, I_y=\frac{hb^3}{12}-\frac{\pi d^4}{32}-\frac{\pi b^2 d^2}{4}$

D. $I_x=\frac{bh^3}{12}-\frac{\pi d^4}{64}, I_y=\frac{hb^3}{12}-\frac{\pi d^4}{64}-\frac{\pi b^2 d^2}{16}$

3. 在弯曲和扭转变形中,外力矩的矢量方向分别与杆的轴线________。

A. 垂直、平行　　　B. 垂直

C. 平行、垂直　　　D. 平行

4. 平面弯曲变形的特征是________。

A. 弯曲时横截面仍保持为平面

B. 弯曲载荷均作用在同一平面内

C. 弯曲变形后的轴线是一条平面曲线

D. 弯曲变形的轴线与载荷作用面同在一个平面内

5. 选取不同的坐标系时,弯曲内力的符号情况是________。

A. 弯矩不同,剪力相同　　　B. 弯矩相同,剪力不同

C. 弯矩和剪力都相同　　　D. 弯矩和剪力都不同

三、作图题

1. 作图 4-21 所示静定多跨梁的内力图。

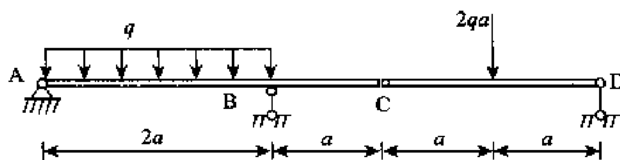


图 4-21

2. 如图 4-22 所示,绘出剪力图和弯矩图。

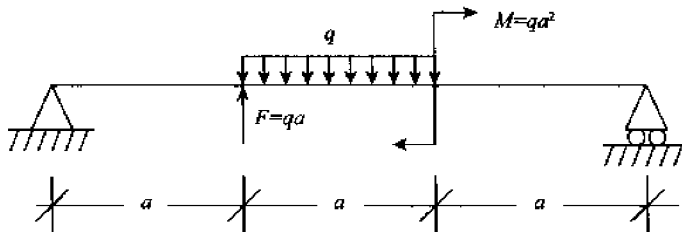


图 4-22

3. 如图 4-23 所示,小车可在梁上移动,它的每个轮子对梁的作用力均为 P。试分析小车处于什么位置时梁内的弯矩最大。

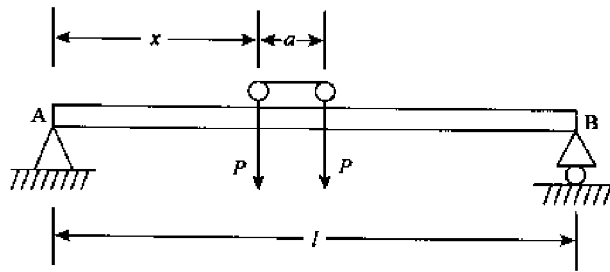


图 4-23

4. 如图 4-24 所示，悬臂梁上表面受切向力 t 作用(单位为 N/m)，已知 t,h,l，试分别做出此梁的轴力、剪力和弯矩图。

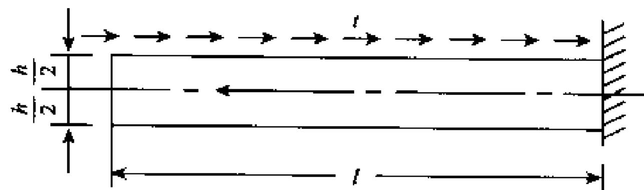


图 4-24

5. 一端外伸的梁的尺寸及所受载荷如图 4-25 所示，q 和 a 均为已知，试做梁的剪力图和弯矩图。

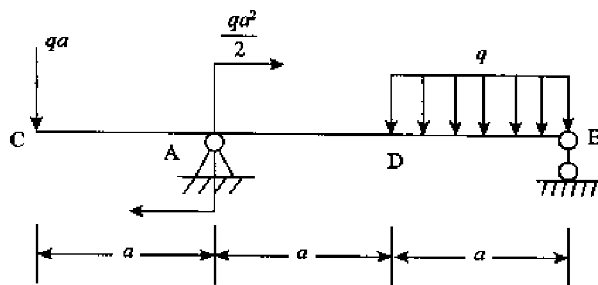


图 4-25

第 5 章　弯曲应力

知识要点

本章主要介绍了杆件弯曲应力的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)纯弯曲时的正应力；

(2)横力弯曲时的正应力；

(3)弯曲剪应力；

(4)关于弯曲理论的基本假设；

(5)提高弯曲强度的措施。

第一节　本章内容总结

1. 纯弯曲正应力

梁的横截面上同时存在剪力和弯矩时，这种弯曲称为横力弯曲。剪力 Q 是横截面切向分布内力的合力；弯矩 M 是横截面法向分布内力的合力偶矩。所以横弯梁横截面上将同时存在剪应力 τ 和正应力 σ 。

实践和理论都证明，弯矩是影响梁的强度和变形的主要因素。因此先讨论 $Q=0$，M 为常数的弯曲问题，这种弯曲称为纯弯曲。

1)变形关系——平面假设

考查等截面直梁。加载前在梁表面上画上与轴线垂直的横线和与轴线平行的纵线，如图 5-1a 所示。然后在梁的两端纵向对称面内施加一对力偶，使梁发生弯曲变形，如图 5-1b 所示。可以发现梁表面变形具有如下特征：

(1)横线($m-m$ 和 $n-n$)仍是直线，只是发生相对转动，但仍与纵线(如 $a-a$，$b-b$)正交。

(2)纵线($a-a$ 和 $b-b$)弯曲成曲线，且梁的一侧伸长，另一侧缩短。

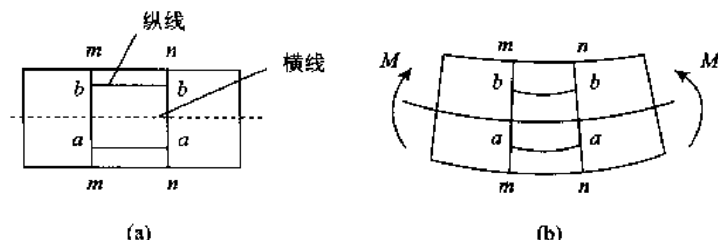


图 5-1

根据上述梁表面变形的特征，可以做出以下假设：梁变形后，其横截面仍保持平面，并垂直于变形后梁的轴线，只是绕着梁上某一轴转过一个角度。与扭转时相同，这一假设也称平面假设。

此外，还假设：梁的各纵向层互不挤压，即梁的纵截面上无正应力作用。

根据上述假设，梁弯曲后，其纵向层一部分产生伸长变形，另一部分则产生缩短变形，二者交界处存在既不伸长也不缩短的一层，这一层称为中性层。中性层与横截面的交线为截面的中性轴。横截面上位于中性轴两侧的各点分别承受拉应力或压应力，中性轴上各点的正应力为零。

下面根据平面假设找出纵向线应变沿截面高度的变化规律。

考查梁上相距为 dx 的微段(图 5-2a)，其变形如图 5-2b 所示。其中 x 轴沿梁的轴线，y 轴与横截面的对称轴重合，z 轴为中性轴。则距中性轴为 y 处的纵向层 $a-a$ 弯曲后的长度为 $(\rho+y)d\theta$，其纵向正应变为：$\varepsilon=\dfrac{(\rho+y)d\theta-\rho d\theta}{\rho d\theta}=\dfrac{y}{\rho}$ 。

上式表明：纯弯曲时梁横截面上各点的纵向线应变沿截面高度线性分布。

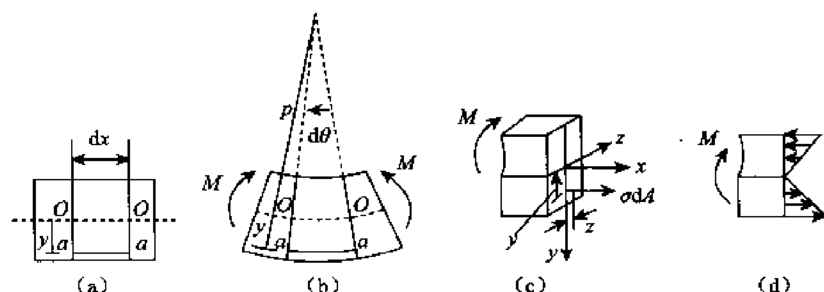


图 5-2

2)物理关系

根据以上分析，梁横截面上各点只受正应力作用。再考虑到纵向层之间互不挤压的假设，所以纯弯梁各点处于单向应力状态。对于线弹性材料，根据胡克定律有：

$$\sigma=E\varepsilon=\frac{E}{\rho}\cdot y$$

式中 E 、ρ 均为常数，上式表明：纯弯梁横截面上任一点处的正应力与该点到中性轴的垂直距离 y 成正比。即正应力沿着截面高度按线性分布，如图 5-2d 所示。

上式不能直接用以计算应力，因为中性层的曲率半径 ρ 以及中性轴的位置尚未确定。这要利用静力关系来解决。

3)静力关系

弯矩 M 作用在 $x-y$ 平面内。截面上坐标为 y、z 的微面积 dA 上有作用力 σdA，如图 5-2c 所示。横截面上所有微面积上的这些力将组成轴力 N 以及对 y、z 轴的力矩 My 和 Mz：

$$N=\int_A\sigma dA\;;\;M_y=\int_A z\sigma dA\;;\;M_z=\int_A y\sigma dA$$

在纯弯情况下，梁横截面上只有弯矩 $M_z=M$，而轴力 N 和 M_y 皆为零。

(1) $N=\int_A\dfrac{E}{\rho}ydA=\dfrac{E}{\rho}\int_A ydA=\dfrac{E}{\rho}S_z=0$

其中 $S_z=\int_A ydA$，称为截面对 z 轴的静矩。因为 $\dfrac{E}{\rho}\neq 0$，故有 $S_z=0$ 。这表明中性轴 z 通过截面形心。

(2) $M_y = \int_A \frac{E}{\rho} yz \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A yz \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0$

其中 $I_{yz} = \int_A yz \mathrm{d}A$ 称为截面对 y、z 轴的惯性积。使 $I_{yz} = 0$ 的一对互相垂直的轴称为主轴。由于 y 轴为横截面的对称轴，对称轴必为主轴，而 z 轴又通过横截面形心，所以 y、z 轴为形心主轴。

(3) $M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} I_z = M$

由此可以得到：$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$

其中 $I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A$ 称为截面对 z 轴的惯性矩；EI_z 称为截面的抗弯刚度。上式表明，梁弯曲的曲率与弯矩成正比，而与抗弯刚度成反比。

将上式代入：$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot y$，得到纯弯情况下的正应力计算公式为：$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}$

上式中正应力 σ 的正负号与弯矩 M 及点的坐标 y 的正负号有关。实际计算中，可根据截面上弯矩 M 的方向，直接判断中性轴的哪一侧产生拉应力，哪一侧产生压应力，而不必计及 M 和 y 的正负。

横截面上离中性轴最远的各点，弯曲正应力最大，为 $\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_z}$

式中 I_z/y_{max} 称抗弯截面系数，用 W_z 表示，常用的矩形、圆形和空心圆抗弯截面系数分别为：

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \text{（矩形）}$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \text{（圆形）}$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4) \text{（空心圆）}$$

$\alpha = a/D$ 代表内、外径的比值。

2. 横弯曲正应力

梁在横弯曲作用下，其横截面上不仅有正应力，还有剪应力。由于存在剪应力，横截面不再保持平面，而发生“翘曲”现象。

进一步的分析表明，对于细长梁（例如矩形截面梁，$l/h \geqslant 5$，l 为梁长，h 为截面高度），剪应力对正应力和弯曲变形的影响很小，可以忽略不计，上述公式仍然适用。

当然上述公式只适用于材料在线弹性范围，并且要求外力满足平面弯曲的加力条件：对于横截面具有对称轴的梁，只要外力作用在对称平面内，梁便产生平面弯曲；对于横截面无对称轴的梁，只要外力作用在形心主轴平面内，实心截面梁便产生平面弯曲。

上述公式是根据等截面直梁导出的。对于缓慢变化的变截面梁，以及曲率很小的曲梁（$h/\rho_0 \leqslant 0.2$，ρ_0 为曲梁轴线的曲率半径）也可近似适用。

3. 弯曲剪应力

梁受横力弯曲时，虽然横截面上既有正应力 σ，又有剪应力 τ。但一般情况下，剪应力对梁

的强度和变形的影响属于次要因素，因此对由剪力引起的剪应力，不再用变形、物理和静力关系进行推导，而是在承认正应力公式 $\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}$ 仍然适用的基础上，假定剪应力在横截面上的分布规律，然后根据平衡条件导出剪应力的计算公式。

1)矩形截面梁

对于如图 5-3 所示的矩形截面梁，横截面上作用剪力 Q。现分析距中性轴 z 为 y 的横线 aa_1 上的剪应力分布情况。根据剪应力成对定理，横线 aa_1 两端的剪应力必与截面两侧边相切，即与剪力 Q 的方向一致。由于对称的关系，横线 aa_1 中点处的剪应力也必与 Q 的方向相同。

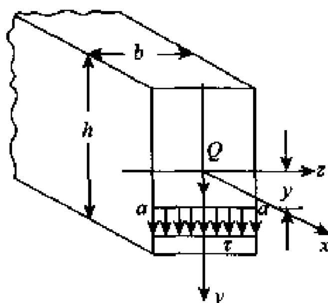


图 5-3

根据这三点剪应力的方向，可以设想 aa_1 线上各点剪应力的方向皆平行于剪力 Q。又因截面高度 h 大于宽度 b，剪应力的数值沿横线 aa_1 不可能有太大变化，可以认为是均匀分布的。基于上述分析，可作如下假设：

①横截面上任一点处的剪应力方向均平行于剪力 Q。

②剪应力沿截面宽度均匀分布。

基于上述假定得到的解，与精确解相比有足够的精确度。从图 5-4a 的横弯梁中截出 dx 微段，其左右截面上的内力如图 5-4b 所示。梁的横截面尺寸如图 5-4c 所示，现欲求距中性轴 z 为 y 的横线 aa_1 处的剪应力 τ。过 aa_1 用平行于中性层的纵截面 aa_1cc_1 自 dx 微段中截出一微块(图 5-4d)。

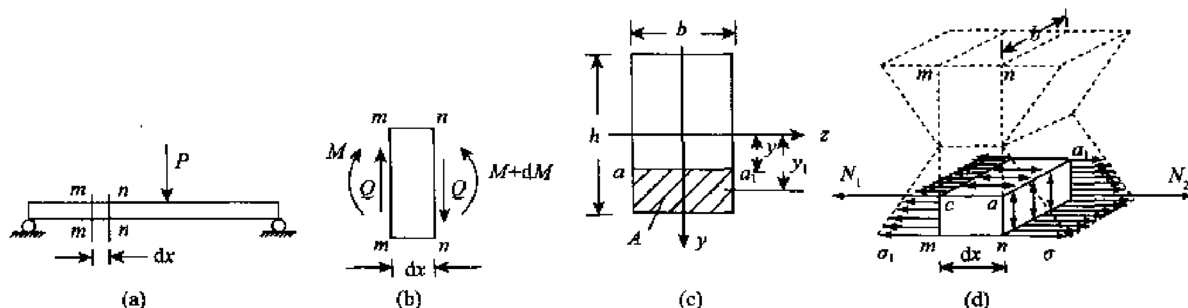


图 5-4

根据剪应力成对定理，微块的纵截面上存在均匀分布的剪应力 τ'。微块左右侧面上正应力的合力分别为 N_1 和 N_2，其中：

$$N_1 = \int_{A^*} \sigma_1 dA = \int_{A^*} \frac{My_1}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$N_2 = \int_{A^*} \sigma_{II} \mathrm{dA} = \int_{A^*} \frac{(M+\mathrm{d}M)y_1}{I_z} \mathrm{dA} = \frac{(M+\mathrm{d}M)}{I_z} S_z^*$$

式中，A^* 为微块的侧面面积，$\sigma_I(\sigma_{II})$ 为面积 A^* 中距中性轴为 y_1 处的正应力，$S_z^* = \int_{A^*} y_1 \mathrm{dA}$。

由微块沿 x 方向的平衡条件 $\sum x = 0$，得：$-N_1 + N_2 - \tau' b \mathrm{d}x = 0$

由上述三式可得：$\frac{\mathrm{d}M}{I_z} S_z^* - \tau' b \mathrm{d}x = 0$，故：$\tau' = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \frac{S_z^*}{bI_z}$

因 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q, \tau' = \tau$，故求得横截面上距中性轴为 y 处横线上各点的剪应力 τ 为：

$$\tau = \frac{QS_z^*}{bI_z}$$

上式也适用于其他截面形式的梁。式中，Q 为截面上的剪力；I_z 为整个截面对中性轴 z 的惯性矩；b 为横截面在所求应力点处的宽度；S_y^* 为面积 A^* 对中性轴的静矩。

对于矩形截面梁(如图 5-5a 所示)，可取 $\mathrm{dA} = b\mathrm{d}y_1$，于是：

$$S_z^* = \int_A y_1 \mathrm{dA} = \int_y^{\frac{h}{2}} b y_1 \mathrm{d}y_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

这样，$\tau = \frac{QS_z^*}{bI_z}$ 可写成：$\tau = \frac{Q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$

上式表明，沿截面高度剪应力 τ 按抛物线规律变化(图 5-5b)。在截面上、下边缘处，$y = \pm \frac{h}{2}$，$\tau = 0$；在中性轴上，$z = 0$，剪应力值最大，其值为：$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}$

式中 $A = bh$，即矩形截面梁的最大剪应力是其平均剪应力的 3/2 倍。

2)圆形截面梁

如图 5-6 所示，在圆形截面上，任一平行于中性轴的横线 aa_1 两端处，剪应力的方向必切于圆周，并相交于 y 轴上的 c 点。

因此横线上各点剪应力方向是变化的，但在中性轴上各点剪应力的方向皆平行于剪力 Q，设为均匀分布，其值为最大，即：$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}$

式中 $A = \frac{\pi}{4}d^2$，即圆截面的最大剪应力为其平均剪应力的 4/3 倍。

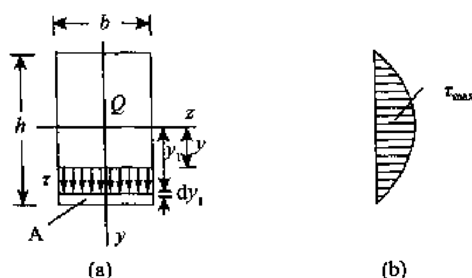


图 5-5

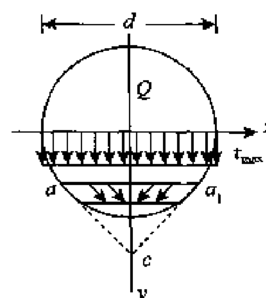


图 5-6

3)工字形截面梁

工字形截面梁由腹板和翼缘组成。在翼缘上剪应力很小，在腹板上剪应力沿腹板高度按抛

物线规律变化，如图 5-7 所示。最大剪应力在中性轴上，其值为：$\tau_{max}=\dfrac{Q(S_z^*)_{max}}{dI_z}$

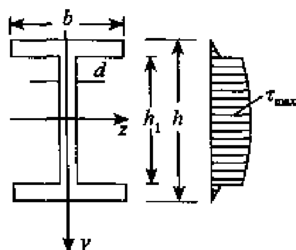


图 5-7

式中$(S_z^*)_{max}$为中性轴一侧截面面积对中性轴的静矩。对于轧制的工字钢，此值可以从型钢表中查得。

计算结果表明，腹板承担的剪力约为(0.95～0.97)Q，因此也可用下式计算τ_{max}的近似值：

$$\tau_{max}\approx\frac{Q}{h_1d}$$

式中 h_1 为腹板的高度，d 为腹板的宽度。

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1)求梁截面的应力分布，并绘制应力分布图；

(2)求梁的最大正应力及最大剪应力；

(3)求叠合梁中的应力(含黏结与非黏结)；

(4)画出薄壁截面梁弯曲中心的大致位置。

【例 1】 外伸梁截面及受载如图 5-8 所示，已知 $I_z=500\times10^4\text{mm}^4$，材料的$[\sigma_t]=15\text{MPa}$，$[\sigma_c]=40\text{MPa}$，校核该梁强度。(北方交通大学，2002 年)

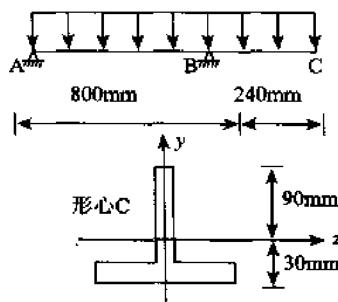


图 5-8

解　设支座 B 处的支反力是 $F_B(\uparrow)$，由平衡条件 $\sum M_A=0$ 得到：

$$\frac{1}{2}\times15\times(1.04)^2-F_B\cdot0.8=0\Rightarrow F_B=9.375\text{kN}$$

以 A 点为原点建立沿梁轴方向的 x 坐标，则

$$M_{(x)}=\begin{cases}9.375\times(0.8-x)-\dfrac{1}{2}\times 15\times(1.04-x)^2 & x\in[0,0.8]\\ -\dfrac{1}{2}\times 15\times(1.04-x)^2 & x\in[0.8,1.04]\end{cases}$$

从中容易获得最大正弯距是 $M_{max}=0.675\text{kN}\cdot\text{m}$，

最大负弯距是 $M_{min}=0.432\text{kN}\cdot\text{m}$。

最大正弯矩截面的最大拉应力和最大压应力分别是

$$\sigma_{tmax}=\frac{0.675\times 30\times 10^3\times 10^{-3}}{500\times 10^4\times 10^{-12}}=4.07\times 10^6(\text{Pa})=4.07\text{MPa}<[\sigma_t]=15\text{MPa}$$

$$\sigma_{cmax}=\frac{0.675\times 90\times 10^3\times 10^{-3}}{500\times 10^4\times 10^{-12}}=12.2\times 10^6(\text{Pa})=12.2\text{MPa}<[\sigma_c]=40\text{MPa}$$

最大负弯矩截面的最大拉应力和最大压应力分别是

$$\sigma_{tmax}=\frac{0.432\times 90\times 10^3\times 10^{-3}}{500\times 10^4\times 10^{-12}}=7.78\times 10^6(\text{Pa})=7.78\text{MPa}<[\sigma_t]=15\text{MPa}$$

$$\sigma_{cmax}=\frac{0.432\times 30\times 10^3\times 10^{-3}}{500\times 10^4\times 10^{-12}}=2.59\times 10^6(\text{Pa})=2.59\text{MPa}<[\sigma_c]=40\text{MPa}$$

综合以上，梁的强度满足要求。

评注，对不容易直接判断危险点的确切位置时，需对各种可能的危险点进行一一校核。

【例 2】 已知图 5-9 所示的梁允许拉应力 $[\sigma_t]=30\text{MPa}$，允许压应力 $[\sigma_c]=100\text{MPa}$，$L=1.0\text{m}$，$q=4\text{kN/m}$，$P=11\text{kN}$。试按正应力强度条件对梁的强度进行校核。（武汉大学，2003 年）

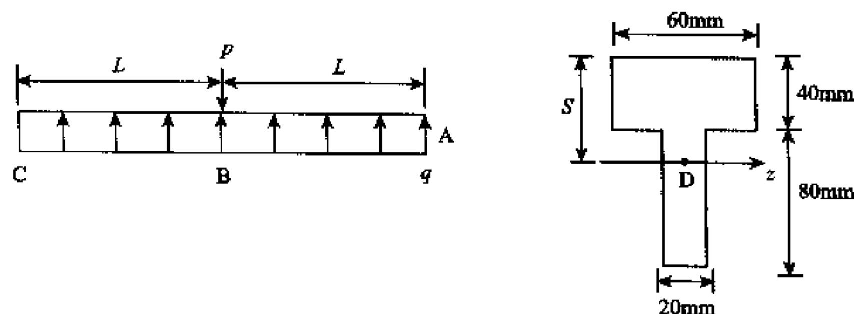


图 5-9

解 设形心轴离 T 形截面上缘的距离是 S，由组合圆形形心公式得到，

$$S=\frac{80\times 20\times 80+40\times 60\times 20}{80\times 20+40\times 60}=44\text{mm}$$

利用平行移轴定理得到截面对其形心轴的惯性矩是：

$$I=\frac{20\times 80^3}{12}+80\times 20\times(80-44)^2+\frac{60\times 40^3}{12}+60\times 40\times(44-20)^2=4.62\times 10^6(\text{mm}^4)$$

做悬臂梁的弯矩图如图 5-10：

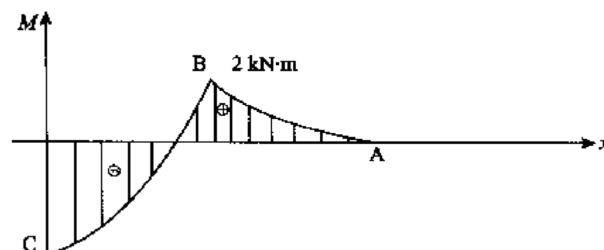


图 5-10

由上述弯矩图发现最大拉应力可能发生在 B 截面的下边缘或 C 截面的上边缘，最大压应力发生在 C 截面的下边缘，即

梁中最大拉应力是：

$$\sigma_{\mathrm{tmax}}^{C}=\frac{3\times10^{3}\times44\times10^{-3}}{4.62\times10^{6}\times10^{-12}}=28.5\times10^{6}(\mathrm{Pa})=28.5\mathrm{MPa}<[\sigma_{t}]=30\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{tmax}}^{B}=\frac{2\times10^{3}\times76\times10^{-3}}{4.62\times10^{6}\times10^{-12}}=32.9\times10^{6}(\mathrm{Pa})=32.9\mathrm{MPa}>[\sigma_{t}]=30\mathrm{MPa}$$

梁中最大压应力是：

$$\sigma_{\mathrm{cmax}}^{C}=\frac{3\times10^{3}\times76\times10^{-3}}{4.62\times10^{6}\times10^{-12}}=49.3\times10^{6}(\mathrm{Pa})=49.3\mathrm{MPa}<[\sigma_{c}]=100\mathrm{MPa}$$

综合以上，梁的强度不能满足要求。

评注：对危险点的判断可以综合截面弯距大小和截面形心位置两个因素，读者应学会排除危险点以减小计算量。

【例 3】 小锥度变截面悬臂梁如图 5-11 所示，已知直径 $d_b=2d_a$，试求最大正应力的位置及大小。(中南大学，2001 年)

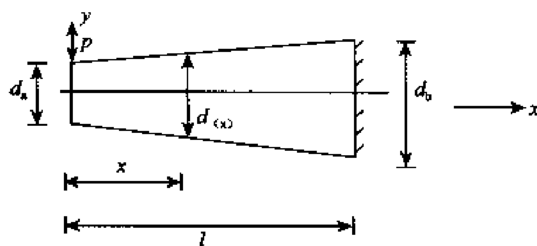


图 5-11

解 对于坐标 x 所对应的梁截面，

$$M(x)=px$$

$$W_{Z}(x)=\frac{\pi}{32}\cdot[d(x)]^{3}=\frac{\pi}{32}\cdot\left[d_{a}+\frac{d_{b}-d_{a}}{l}\cdot x\right]^{3}$$

$$\sigma_{\max}(x)=\frac{M(x)}{W_{Z}(x)}=\frac{px}{\frac{\pi}{32}\cdot\left[d_{a}+\frac{d_{b}-d_{a}}{l}\cdot x\right]^{3}}$$

而 $d_b=2d_a$，所以：$\sigma_{max}(x)=\dfrac{px}{\dfrac{\pi}{32}\cdot d_a^3\cdot(1+\dfrac{x}{l})^3}$

最大正应力处，函数 $\sigma_{max}(x)$ 处驻值，即：$\dfrac{d[\sigma_{max}(x)]}{dx}=0$

从中得到 $x=\dfrac{l}{2}$，即在 $x=\dfrac{l}{2}$ 截面和下边缘有最大正应力是：

$$\sigma_{max}(\frac{l}{2})=\frac{128pl}{27\pi d_a^3}$$

评注：本题要利用高等数学中有关求函数极值的方法，读者要将数学工具掌握好，才能有效地指导力学学习。

【例 4】 在木梁两侧用钢板加面，连接成整体，受力及截面如图 5-12 所示，试求梁中最大正应力。已知，$E_钢=200GPa$，$E_木=10GPa$。（上海交通大学，2001 年）

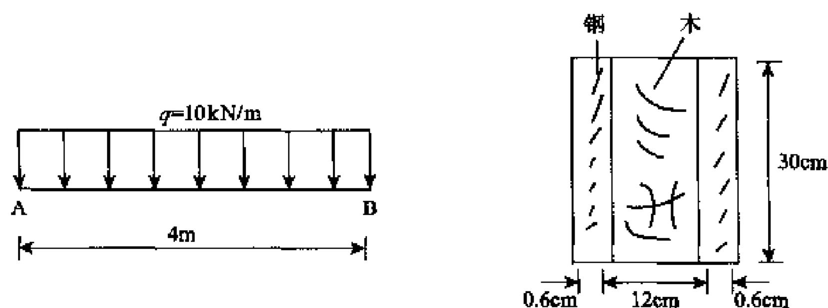


图 5-12

解 简支梁受均布载荷作用，其最大弯矩是：$M_{max}=\dfrac{1}{8}ql^2=\dfrac{1}{8}\times10\times4^2=20kN\cdot m$

而 $M_{max}=M_钢+M_木$

梁受弯曲变形时，钢板与木板的变形一致，即弯曲曲率相同，由曲率公式 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI}$ 得到

$$\frac{M_钢}{E_钢 I_钢}=\frac{M_木}{E_木 I_木}$$

又

$$I_钢=\frac{1}{12}\times0.6\times30^3\times2=2700cm^4$$

$$I_木=\frac{1}{12}\times12\times30^3=27000cm^4$$

从上述各式，有：$M_钢=\dfrac{20}{3}kN\cdot m$，$M_木=\dfrac{40}{3}kN\cdot m$

材料中的最大应力是，

$$(\sigma_钢)_{max}=\frac{M_钢\ y_{max}}{I_钢}=\frac{\dfrac{20}{3}\times10^3\times15\times10^{-2}}{27000\times10^{-8}}=74.07MPa$$

$$(\sigma_{木})_{max}=\frac{M_{木}\ y_{max}}{I_{木}}=\frac{\frac{40}{3}\times10^3\times15\times10^{-2}}{27000\times10^{-8}}=3.7\text{MPa}$$

梁中的最大应力是$(\sigma_{钢})_{max}=74.07\text{MPa}$

评注：组梁变形时，各梁的弯曲曲率相同，由此可以得到变形协调条件。本题实际上是弯曲应力的超静定问题。类似还有上下未黏合的叠梁，也要利用弯曲曲率相同的几何条件。但要注意，未黏合的叠梁，各层均绕各层的中性轴转动，不同于多层黏合梁的绕整梁截面形心轴转动。

【例 5】 在抗弯截面模量$W_z=300\text{cm}^3$的工字截面简支梁 AB 上，有一矩形截面的简支副梁，副梁可沿主梁轴线方向移动。已知主梁跨长 4m，副梁长 1m，副梁的截面宽度$b=4\text{cm}$，高度$h=12\text{cm}$，两梁的许用应力均是$[\sigma]=100\text{MPa}$，试问当副梁跨中加集中力P达到允许载荷时，主梁是否安全？（浙江大学，2000 年）

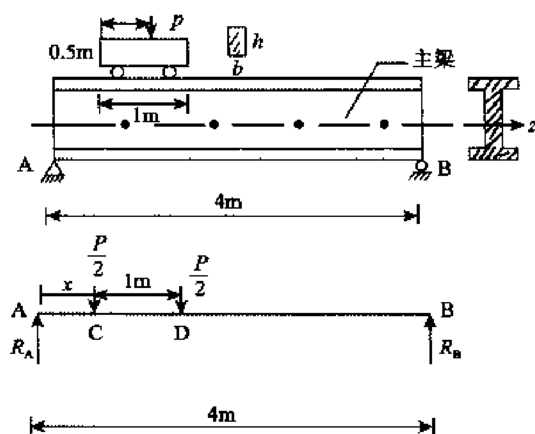


图 5-13

解 对副梁，其弯矩最大值是：$M_{max}=\frac{pl}{4}=\frac{P}{4}(\text{N}\cdot\text{m})$

对应的最大正应力是：$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$

即 $p\leqslant4\cdot[\sigma]\cdot W_z=4\cdot[\sigma]\cdot\frac{bh^2}{\sigma}=\frac{4\times100\times10^6\times4\times12^2\times10^{-6}}{\sigma}=38.4\text{kN}$

所以，副梁的允许荷载是$[p]=38.4\text{kN}$

对主梁，由平衡条件$\sum M_B=0$得到：

$$R_A\cdot4-\frac{[p]}{2}\cdot(4-x)-\frac{[p]}{2}\cdot(3-x)=0\Rightarrow R_A=\frac{3.5-x}{4}\cdot[p]$$

由对称性条件知道只需校核 C、D 任一截面强度即可。

截面 C 的弯矩是：$M_C=R_A\cdot x=\frac{(3.5-x)x}{4}\cdot[p]$

当M_C取极值时：$\frac{dM_C}{dx}=\frac{3.5-2x}{4}\cdot[p]=0\Rightarrow x=1.75\text{m}$

此时，$M_{cmax}=\frac{3.5\times1.75\times1.75^2}{4}\cdot[p]=29.4\text{kN}\cdot\text{m}$

截面 C 的最大应力是，

$$\sigma_{cmax}=\frac{M_{cmax}}{W_z}=\frac{29.4\times10^3}{300\times10^{-6}}=98\times10^6(\text{Pa})=98\text{MPa}<[\sigma]=100\text{MPa}$$

故主梁是安全的。

评注：对移动荷载作用下梁的强度校核，需要用求导的方法确定梁上最大弯矩截面的位置。本题利用对称性对 C、D 任一截面进行强度校核，读者要体会其含义。

【例 6】 在图 5-14 所示工字梁中性层上 C 点处，测得与轴线成 45°方向的线应变 ε。工字钢 $\frac{I_z}{(S_z^K)_{max}}=k$，腹板厚度为 d，弹性模量为 E，泊松比为 μ，求载荷 P。（北京交通大学，2000 年）

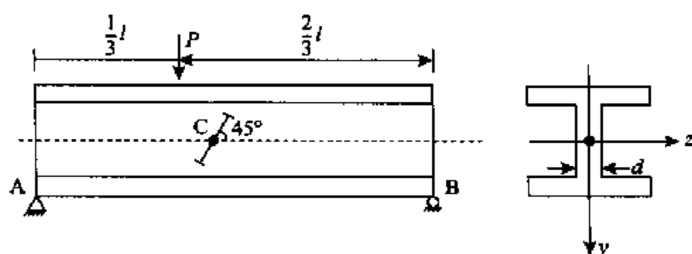


图 5-14

解 在 C 点取单元体，并进行应力分析如图 5-15 所示，因为 C 点处于中性层，为纯剪切应力状态。

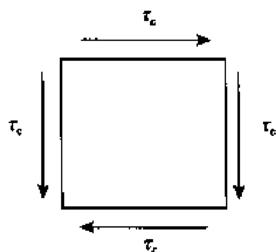


图 5-15

其中 $\tau_c=\frac{Q(S_Z^*)_{max}}{I_z\cdot d}=\frac{Q}{kd}$，那么：

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\cos(2\times45^\circ)-\tau_{xy}\cdot\sin(2\times45^\circ)$$

$$=\frac{0+0}{2}+\frac{0-0}{2}\cdot0-(-\tau_c)\cdot\sin90^\circ$$

$$=\tau_c$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\cos[2\times(-45^\circ)]-\tau_{xy}\cdot\sin[2\times(-45^\circ)]$$

$$=\frac{0+0}{2}+\frac{0-0}{2}\cdot[\cos(\quad90^\circ)]-(-\tau_c)\cdot\sin(-90^\circ)$$

$$=-\tau_c$$

由广义胡克定律

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{1}{\mathrm{E}}\cdot(\sigma_{45^\circ}-\mu\sigma_{-45^\circ})=\frac{1+\mu}{\mathrm{E}}\cdot\tau_c=\frac{1+\mu}{\mathrm{E}}\cdot\frac{Q}{kd}$$

而通过平衡条件 $\sum M_A=0$ 容易得到 C 点的剪力是：$Q=F_B=\dfrac{P\cdot\frac{l}{3}}{l}=\dfrac{1}{3}P$

所以 $\varepsilon_{45^\circ}=\dfrac{1+\mu}{\mathrm{E}}\cdot\dfrac{P}{3kd}$，即：$P=\dfrac{3kd\mathrm{E}\varepsilon_{45^\circ}}{1+\mu}=\dfrac{3kd\mathrm{E}\varepsilon}{1+\mu}$

评注：对于纯剪应力状态的测量可以通过沿 45°方向测量线应变的方式来实现，读者要记住这个简易的实验方法。

【例 7】 槽形截面梁尺寸及受力如图 5-16 所示。材料为铸铁，其许用拉应力$[\sigma_t]$=40MPa，许用压应力$[\sigma_c]$=80MPa。试求许可载荷$[P]$。（北京交通大学，1999 年）

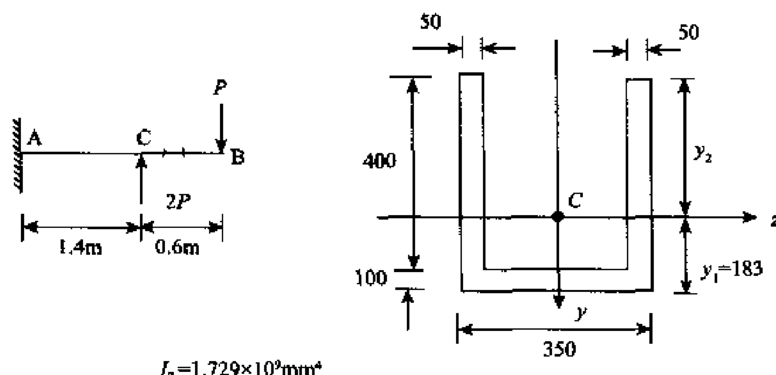


图 5-16

解：(1)画弯矩图如图 5-17。

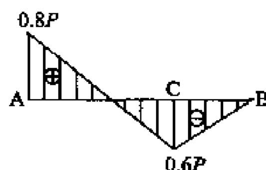


图 5-17

(2)由强度条件确定许可载荷。因拉、压强度不等，且上下边缘到中性轴的距离也不等，故最大正弯矩和最大负弯距所在的 A 截面和 C 截面均应作为危险截面考虑。

对 A 截面：由 $\sigma_{t\max}^{A}=\dfrac{M_A y_1}{\mathrm{I}}=\dfrac{0.8P\times183\times10^{-3}}{1.729\times10^{-3}}\leqslant[\sigma_t]=40\times10^6$ 可得：

$$P\leqslant\frac{40\times10^6\times1.729}{0.8\times183}=472\mathrm{kN}$$

由 $\sigma_{c\max}^{A}=\dfrac{M_A y_2}{\mathrm{I}}=\dfrac{0.8P\cdot y_2}{\mathrm{I}}\leqslant[\sigma_c]$ 可得：

$$P\leqslant\frac{[\sigma_c]\mathrm{I}}{0.8y_2}=\frac{80\times10^6\times1.729\times10^{-3}}{0.8\times317\times10^{-3}}=545\mathrm{kN}$$

对 C 截面：由 $\sigma_{t\max}^{C}=\dfrac{M_c\cdot y_2}{\mathrm{I}}=\dfrac{0.6Py_2}{\mathrm{I}}\leqslant[\sigma_t]$可得：

$$P \leqslant \frac{[\sigma_t]I}{0.6y_2} = \frac{40 \times 10^6 \times 1.729 \times 10^{-3}}{0.6 \times 317 \times 10^{-3}} = 364\text{kN}$$

故$[P]=364\text{kN}$

【例 8】 正方形截面悬臂梁如图 5-18 所示，梁跨度为 l，横截面边长是 a，弹性模量 E，自由端受对角方向 p 力的作用。试求：(1)梁顶 1—1 纵向纤维长度的改变量 Δl；(2)梁横截面上的最大正应力 σ_{max}。（大连理工大学，2000 年）

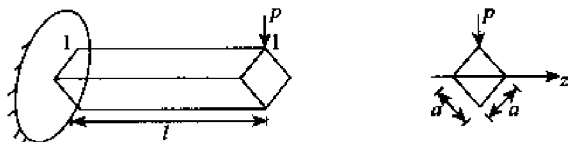


图 5-18

解 (1)对题图所示截面，由图 5-19 知其惯性矩是：

$$I_Z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} y^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - |y|\right) dy = \frac{1}{12}a^4$$

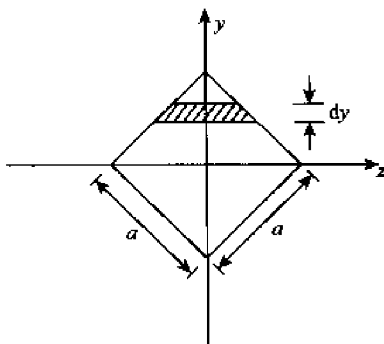


图 5-19

距自由端距离为 x 的截面弯矩是：$M(x) = px$

截面顶端的应力是：$\sigma_{(x)} = \frac{M_{(x)}}{I_z} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{6\sqrt{2} \cdot px}{a^3}$

对应的截面顶端应变是：$\varepsilon_{(x)} = \frac{\sigma_{(x)}}{E} = \frac{6\sqrt{2}px}{Ea^3}$

那么 1—1 纵向纤维的改变量 Δl 是：$\Delta l = \int_H \varepsilon_{(x)} dx = \int_0^l \frac{6\sqrt{2}px}{Ea^3} \cdot dx = \frac{3\sqrt{2}pl^2}{Ea^3}$

(2)在固定端梁的弯矩有最大值是：$M_{max} = pl$

最大正应力是：$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_z} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{pl}{\frac{1}{12}a^4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{6\sqrt{2}pl}{a^3}$

评注：对于非规则截面的惯性矩计算，要通过定义 $I_z = \int_A y^2 dA$ 来实现。读者在熟记规则截面惯性矩公式（矩形：$\frac{1}{12}bh^3$；圆形：$\frac{1}{64}\pi D^4$；空心圆形：$\frac{1}{64}\pi D^4(1-\alpha^4)$；…）的同时也不能忘记其定义式。

【例 9】 矩形截面悬梁，长是 l，受力偶 M 和均布力 q 作用 $M=2qlh$，$h=2b$，如图 5-20

所示，

(1)绘该梁的轴力图和弯矩图。

(2)求最大正应力 σ_{max}。(南京航空航天大学,2002 年)

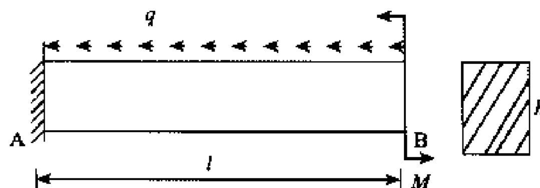


图 5-20

解 (1)梁的轴力图如图 5-21 所示。

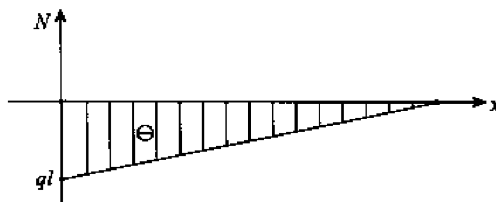


图 5-21

梁的弯矩图如图 5-22 所示。

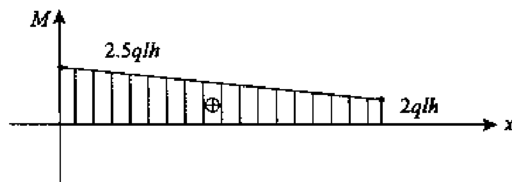


图 5-22

(2)梁在轴力的作用下的最大正应力是：$\sigma_{max}^{N}=\dfrac{ql}{A}=\dfrac{ql}{bh}$

梁在弯矩作用下的最大正应力是：$\sigma_{max}^{M}=\dfrac{2.5qlh}{I_z}\cdot\dfrac{h}{2}=\dfrac{2.5qlh}{\frac{1}{12}bh^3}\cdot\dfrac{h}{2}=\dfrac{15ql}{bh}$

所以，梁的最大正应力是：$\sigma_{max}=\sigma_{max}^{N}+\sigma_{max}^{M}=\dfrac{16ql}{bh}$

【例 10】 试根据平面假设推导如图 5-23 所示双对称剖面组合梁的对称弯曲正应力公式。已知：(1)y 与 z 为横截面对称轴；

(2)梁由三种不同的材料组成，其弹性模量为 E_1,E_2,E_3；

(3)每一种材料的横剖面对于 y 轴的惯性矩是 I_{y1},I_{y2},I_{y3}；

(4)力矩 M 的作用在 $x-z$ 平面内。(上海交通大学,2000 年)

解 由平面假定得到：$\varepsilon_{(Z)}=\dfrac{Z}{\rho}$

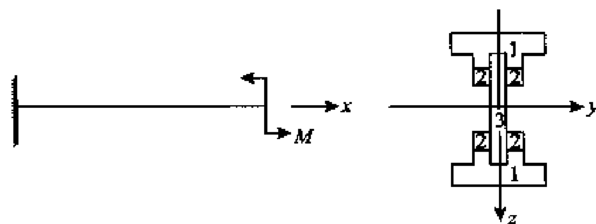


图 5-23

其对应的应力是：$\sigma_{i(Z)} = E_i \cdot \varepsilon_{(Z)} = E_i \cdot \dfrac{Z}{\rho} \qquad (i=1,2,3)$

截面上应力所构成的力偶是：

$$M=\int_{A}\sigma\cdot Z\cdot dA=\sum_{i=1}^{3}\int_{A_i}E_i\cdot\varepsilon_{(Z)}\cdot Z\cdot dA$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\int_{A_i}E_i\cdot\frac{Z}{\rho}\cdot Z\cdot dA=\sum_{i=1}^{3}\frac{E_i}{\rho}\int_{A_i}Z^2dA=\frac{1}{\rho}\cdot\sum_{i=1}^{3}E_iI_{yi}$$

于是，梁的弯曲曲率是：$\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{\sum\limits_{i=1}^{3}E_iI_{yi}}$

梁的弯曲正应力是：$\sigma_i=E_i\cdot\dfrac{Z}{\rho}=\dfrac{E_iMZ}{\sum\limits_{i=1}^{3}E_iI_{yi}} \qquad (i=1,2,3)$

评注：本题属于有黏结的组合梁问题，各材料部分绕整梁截面形心轴转动。

【例 11】 抗拉与抗压弹性模量不等的材料，制成如图 5-24 所示的等截面梁，设其拉伸模量是 E_1，压缩弹性模量是 E_2。试求纯弯曲时，横截面上的正应力公式(平面假设仍然适用)。若 $E_1>E_2$，试问中性轴位置向哪一侧移动？(上海交通大学，2001 年)

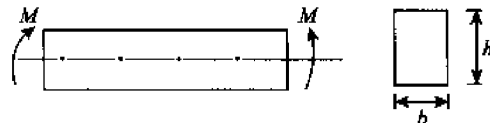


图 5-24

解 因为平面假设仍成立，线应变就成线性规律分布，即 $\varepsilon=\dfrac{y}{\rho}$

式中 ρ 为曲率半径，y 是点到中性轴的距离。由胡克定律可知：

在横截面受拉部分：$\sigma_1=\dfrac{y}{\rho}\cdot E_1 \qquad y\in[0,h_1]$

在横截面受拉部分：$\sigma_2=\dfrac{y}{\rho}\cdot E_2 \qquad y\in[-h_2,0]$

根据静力平衡条件：$\sum F=0$，$N=\int_A\sigma dA=0$，即

$$N=\int_{A_2}\sigma_2dA+\int_{A_1}\sigma_1dA=\int_{-h_2}^{0}\frac{y}{\rho}\cdot E_2\cdot bdy+\int_0^{h_1}\frac{y}{\rho}\cdot E_1\cdot b\cdot dy$$

$$=-\frac{E_2b}{\rho}\cdot\frac{h_2^2}{2}+\frac{E_1b}{\rho}\cdot\frac{h_1^2}{2}=0$$

$$\frac{h_1^2}{h_2^2}=\frac{E_2}{E_1}$$

$$h_1=\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\cdot h_2=(h-h_1)\cdot\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}$$

所以：

$$h_1=\frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}$$

$$h_2=h-h_1=\frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}$$

从上两式可以看出，当 $E_1>E_2$ 时，$h_2>h_1$，即中性轴向受拉一侧移动，如图 5-25 所示。

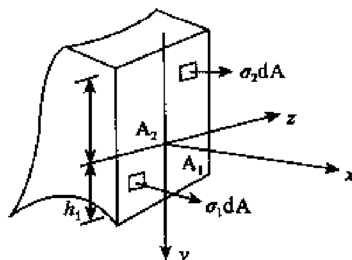


图 5-25

又 $\sum M_Z=0, M_Z=\int_A y\sigma\mathrm{d}A=M$

即 $M=\int_{A_2}y\sigma_2\mathrm{d}A+\int_{A_1}y\sigma_1\mathrm{d}A$

$$=\int_{-h_2}^{0}\frac{y^2}{\rho}\cdot E_2\cdot b\mathrm{d}y+\int_0^{h_1}\frac{y^2}{\rho}\cdot E_1\cdot b\mathrm{d}y=\frac{bE_2h_2^3}{3\rho}+\frac{bE_1h_1^3}{3\rho}=\frac{b(E_1h_1^3+E_2h_2^3)}{3\rho}$$

所以 $\frac{1}{\rho}=\frac{3M}{b(E_1h_1^3+E_2h_2^3)}$

于是，受拉一侧任意点的正应力公式是：

$$\sigma_1=\frac{y}{\rho}\cdot E_1$$

$$=\frac{3ME_1}{b(E_1h_1^3+E_2h_2^3)}\cdot y=\frac{3E_1My}{b\left[E_1\cdot\left(\frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}\right)^3+E_2\cdot\left(\frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}\right)^3\right]}$$

$$=\frac{3(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2My}{E_2bh^3}\qquad y\in[0,h_1]$$

同理，可求得受压一侧任意点的正应力公式是：

$$\sigma_2=\frac{y}{\rho}E_2=\frac{3(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2My}{E_1bh^3}\qquad y\in[-h_2,0]$$

$\sum M_y=0$，自动满足。

评注：本题属于几何性质对称但物理性质不对称的弯曲问题。抓住平面假定和平衡条件，问题迎刃而解。

第三节 习 题

一、填空题

1. 在推导梁平面弯曲的正应力公式时，是从几何方面、________方面和________。方面综合考虑的。

2. 受横力弯曲的梁横截面上的正应力沿截面高度按________规律变化，在________处最大。

3. 等截面梁用积分法计算其挠度和转角时，积分常数根据________条件和________条件决定。

4. 如图 5-26 所示，三角形 ABC，已知 $I_{z_1}=bh^3/12$，z_2 轴 // z_1 轴，则 I_{z_2} 为________。

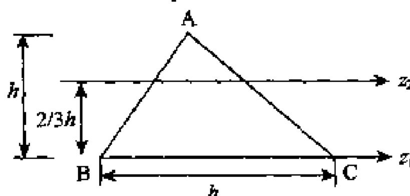


图 5-26

5. 中性轴是____。

6. 矩形截面梁，若截面高度和宽度都增加一倍，则其强度将提高到原来的________倍。

7. 非对称薄壁截面梁只发生平面弯曲，不发生扭转的横向力作用条件是________。

二、选择题

1. 在下列关于平面图形的结论中，________是错误的。
   A. 图形的对称轴必定通过形心
   B. 图形两个对称轴的交点必为形心
   C. 图形对对称轴的静矩为零
   D. 使静矩为零的轴为对称轴

2. 在平面图形的几何性质中，________的值可正、可负、也可为零。
   A. 静矩和惯性矩　　B. 极惯性矩和惯性矩
   C. 惯性矩和惯性积　　D. 静矩和惯性积

3. 设矩形对其一对称轴 z 的惯性矩为 I，则当其长宽比保持不变，而面积增加 1 倍时，该矩形对 z 的惯性矩将变为________。
   A. 2I　　B. 4I　　C. 8I　　D. 16I

4. 在下列四种情况中，________称为纯弯曲。
   A. 载荷作用在梁的纵向对称面内
   B. 载荷仅有集中力偶，无集中力和分布载荷
   C. 梁只发生弯曲，不发生扭转和拉压变形

D. 梁的各个截面上均无剪力，且弯矩为常量

5. 梁发生平面弯曲时，其横截面绕________旋转。

A. 梁的轴线　　B. 截面的中性轴

C. 截面的对称轴　　D. 截面的上(或下)边缘

6. 几何形状完全相同的两根梁，一根为铝材，一根为钢材，若两根梁受力状态也相同，则它们的________。

A. 弯曲应力相同，轴线曲率不同　　B. 弯曲应力不同，轴线曲率相同

C. 弯曲应力和轴线曲率均相同　　D. 弯曲应力和轴线曲率均不同

7. 在厂房建筑中使用的“鱼腹梁”实质上是根据简支梁上的________而设计的等强度梁。

A. 受集中力、截面宽度不变　　B. 受集中力、截面高度不变

C. 受均布载荷、截面宽度不变　　D. 受均布载荷、截面高度不变

8. 设计钢梁时，宜采用中性轴为________的截面。

A. 对称轴　　B. 靠近受拉边的非对称轴

C. 靠近受压边的非对称轴　　D. 任意轴

三、判断题

1. 截面尺寸和长度相同两悬臂梁，一为钢制，一为木制，在相同载荷作用下，两梁中的最正大应力和最大挠度都相同。(　　)

2. 若截面图形有对称轴，则该图形对其对称轴的静矩为零，惯性矩不为零。(　　)

3. 若截面有一个对称轴，则截面对包含对称轴的正交坐标系的惯性积不一定为零(这要取决坐标原点是否位于截面形心)。(　　)

4. 任意图形，若对某一对正交坐标轴的惯性积为零，则这一对坐标轴一定是该图形的主惯性轴。(　　)

5. 梁剪切弯曲时，其截面上即有正应力，又有剪应力。(　　)

6. 等直实体梁发生平面弯曲变形的充分必要条件是载荷均作用在同一纵向对称面内。(　　)

四、计算题

1. 已知：T 形铸铁外伸梁$[\sigma_t]=35\text{MPa}$，$[\sigma_c]=120\text{MPa}$，$I_z=5000\times10^4\text{mm}^4$，$y_1=70\text{mm}$，$y_2=130\text{mm}$，$z$ 轴过形心，试求：

(1)按图 5-27(a)放置时的许用载荷$[P]$。

(2)按图 5-27(b)、(c)两种放置哪种合理？为什么？

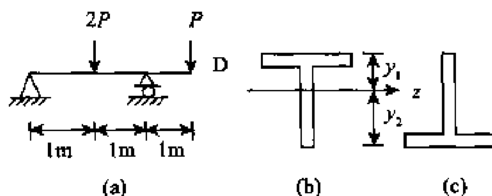


图 5-27

2. 图 5-28 为外伸梁，截面为工字形，求支撑 B 在什么位置时受到的荷载最大，以及此时梁中的最大剪切应力？

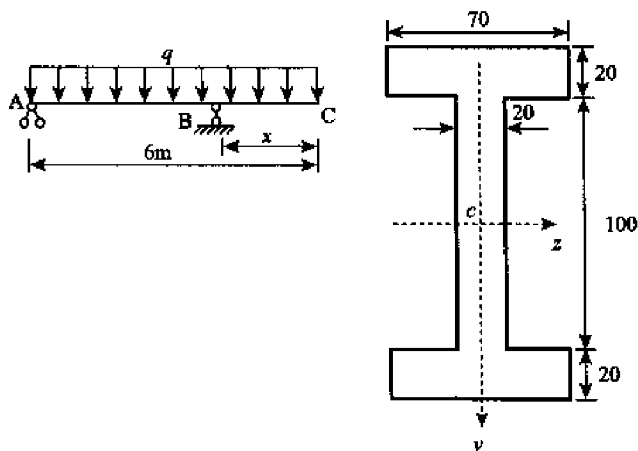


图 5-28

3. 一铁路枕木承受两个 $P=2000\text{kN}$ 集中载荷，如图 5-29 所示，路基的反力 q 可假设均匀分布在枕木的长度上。枕木横截面的尺寸为 $b=300\text{mm}$，$h=250\text{mm}$，设 $L=1450\text{mm}$，$a=50\text{mm}$。

(1)画出剪力图和弯矩图；

(2)计算最大的弯曲正应力 $\sigma_{\max}$ 和剪应力 $\tau_{\max}$。

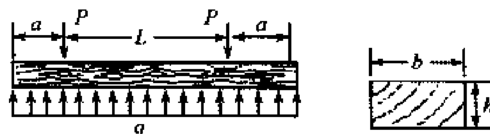


图 5-29

4. 如图 5-30 所示圆木，直径为 D，需要从中切取一矩形截面梁，试问：

(1)如要使所切矩形截面的抗弯强度最高，h、b 分别为何值？

(2)如要使所切矩形截面的抗弯刚度最高，h、b 分别为何值？

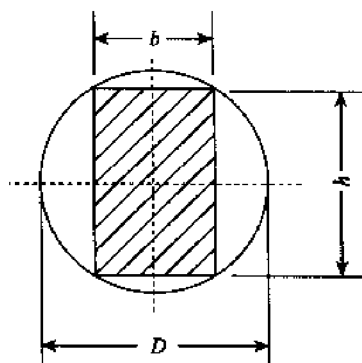


图 5-30

5. 矩形截面梁受荷如图 5-31 所示，材料的许用应力 $[\sigma]=10\text{MPa}$，$[\tau]=5\text{MPa}$，试选择该梁的截面尺寸。设 $h:b=2:1$。

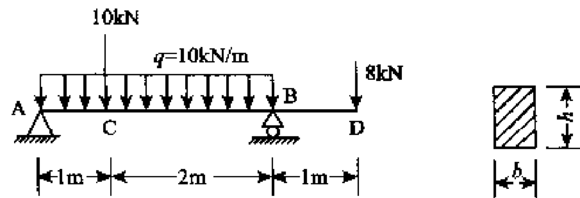


图 5-31

6. 如图 5-32 所示悬臂梁是由两个正方形截面梁组成，两根梁在自由端处用螺栓连接，已知螺栓的剪切许用应力$[\tau]=60\text{MPa}$，$a=10\text{cm}$，试选择螺栓的直径 d。

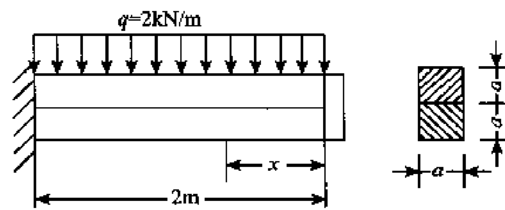


图 5-32

第 6 章　弯曲变形

知识要点

本章主要介绍了杆件弯曲变形的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)挠曲线的微分方程；

(2)用积分法求弯曲变形；

(3)用叠加法求弯曲变形；

(4)简单静不定梁；

(5)提高梁弯曲刚度的一些措施。

第一节　本章内容总结

1. 挠度与转角以及梁的刚度条件

梁变形前后形状的变化称为变形，一般用各段梁曲率的变化表示。梁变形前后位置的变化称为位移，位移包括线位移和角位移。

在小变形和忽略剪力影响的条件下，线位移是截面形心沿垂直于梁轴线方向的位移，称为挠度，用 ν 表示；角位移是横截面变形前后的夹角，称为转角，用 θ 表示。而 $\theta(x)=\dfrac{\mathrm{d}\nu(x)}{\mathrm{d}x}$ ，可见确定梁的位移，关键是确定挠曲线方程 $\nu(x)$ 。

梁的设计中，除了需要满足强度条件外，在很多情况下，还要将其弹性变形限制在一定范围内，即满足刚度条件：

$$|\nu|_{\max}\leqslant[\nu]\ ,\ |\theta|_{\max}\leqslant[\theta]$$

式中的 $[\nu]$ 和 $[\theta]$ 分别为梁的许用挠度和许用转角，可从有关设计手册中查得。

2. 挠度曲线的近似微分方程

忽略剪力对变形的影响，梁平面弯曲的曲率公式为：$\dfrac{1}{\rho(x)}=\dfrac{M(x)}{\mathrm{EI}}$

上式表明梁轴线上任一点的曲率 $1/\rho(x)$ 与该点处横截面上的弯矩 $M(x)$ 成正比，而与该截面的抗弯刚度 EI 成反比，如图 6-1 所示。

而梁轴线上任一点的曲率与挠曲线方程 $\nu(x)$ 之间存在下列关系：

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{\mathrm{EI}}\ ;\ \frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\nu(x)}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

由上面两式可得：$\pm \dfrac{\dfrac{d^2\nu(x)}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{d\nu(x)}{dx}\right)^{\frac{3}{2}}\right]} = \dfrac{M(x)}{EI}$

小挠度条件下，$\dfrac{d\nu(x)}{dx}=\theta\ll 1$，该式可简化为：$\pm\dfrac{d^2\nu(x)}{dx^2}=\dfrac{M(x)}{EI}$（梁的挠曲线近似微分方程）。

在如图 6-2 所示的坐标系中，正弯矩对应着 $\dfrac{d^2\nu(x)}{dx^2}$ 的正值（图 6-2a），负弯矩对应着 $\dfrac{d^2\nu(x)}{dx^2}$ 的负值（图 6-2b），故上式左边的符号取正值：

$$\frac{d^2\nu(x)}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

上式称为小挠度曲线微分方程，简称小挠度微分方程。显然，小挠度微分方程仅适用于线弹性范围内的平面弯曲问题。

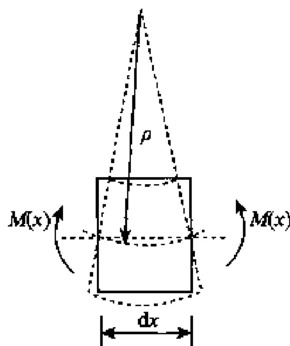


图 6-1

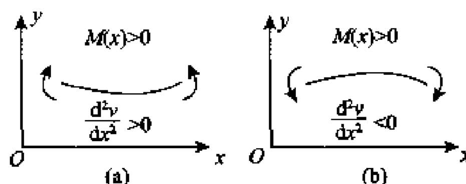


图 6-2

3. 用积分法求弯曲变形

小挠度曲线微分方程分别对 x 一次积分和二次积分，便得到梁的转角方程和挠度方程：

$$\theta(x)=\frac{d\nu(x)}{dx}=\int\frac{M(x)}{EI}dx+C$$

$$\nu(x)=\int\int\frac{M(x)}{EI}dxdx+Cx+D$$

其中 C、D 为积分常数，由边界条件和连续条件确定。

对于载荷无突变的情形，梁上的弯矩可以用一个函数来描述，上面两式将仅有两个积分常数，由梁的边界条件（即支座对梁的挠度和转角提供的限制）确定。两种典型的边界条件如图 6-3 所示。

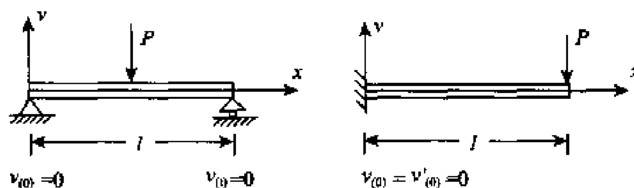


图 6-3

对于载荷有突变(集中力、集中力偶、分布载荷间断等)的情况,弯矩方程需要分段描述。对上面两式必须分段积分,每增加一段就多出两个积分常数。

由于梁的挠度曲线为一连续光滑曲线,在分段点处,相邻两段的挠度和转角值必须对应相等。于是每增加一段就多提供两个确定积分常数的条件,这就是连续条件。

4. 用叠加法求弯曲变形

在材料服从胡克定律和小变形的条件下,由小挠度曲线微分方程得到的挠度和转角均与载荷成线性关系。因此,当梁承受复杂载荷时,可将其分解成几种简单载荷,利用梁在简单载荷作用下的位移计算结果,叠加后得到梁在复杂载荷作用下的挠度和转角,这就是叠加法。

5. 简单静不定梁

静不定梁:约束反力数目多于静力平衡方程数目的梁称为静不定梁。两者数目的差称为静不定次数。

静定基:指将静不定梁上的多余约束除去后所得到的"静定基本系统"。

相当系统:在静定基上加上外载荷以及多余约束力,便得到受力和变形与静不定梁完全相同的相当系统。将相当系统与静不定梁相比较,在多余约束处,找到变形协调条件,进而得到求解静不定问题所需的补充方程。通过静力平衡方程和补充方程可联立求解静不定问题。

6. 提高梁刚度的措施

从挠曲线的近似微分方程及其积分可以看出,弯曲变形与弯矩大小、跨度长短、支座条件,梁截面的惯性矩 I 、材料的弹性模量 E 有关。故提高梁刚度的措施为:

(1)改善结构形式,减小弯矩 M;

(2)增加支撑,减小跨度 l;

(3)选用合适的材料,增加弹性模量 E 。但因各种钢材的弹性模量基本相同,所以为提高梁的刚度而采用高强度钢,效果并不显著;

(4)选择合理的截面形状,提高惯性矩 I ,如工字形截面、空心截面等。

第二节　典型题分析

重要考点提示:

(1)用叠加法求弯曲变形;

(2)静不定梁的相关计算;

(3)挠曲线的微分方程的灵活应用;

(4)对梁表而的单元体分析;

(5)和应变片相关的测量问题。

【例 1】 如图 6-4 所示,抗弯刚度为 EI 的梁,在全梁上受集度为 q 的均布荷载作用。试求此梁的挠曲线方程和转角方程,并确定其最大挠度和最大转角。(梁长为 l)(华中科技大学,

2002 年)

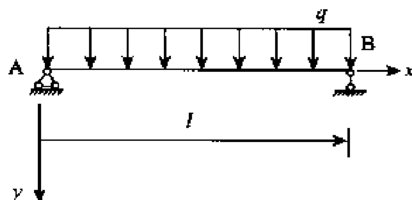


图 6-4

解　设支座 A 和支座 B 的支反力分别是 R_A 和 R_B，由对称性：$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

梁的弯矩方程是：$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{q}{2}(lx - x^2)$

而根据梁的挠曲线近似微分方程，即 $M(x) = EIy''$ 积分得到

$$\begin{cases} EIy' = \frac{q}{2}(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}) + C_1 \\ EIy = \frac{q}{2}(l \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}) + C_1x + C_2 \end{cases}$$

左右两铰支座的挠度等于零，即，$x=0$ 时，$y=0$；$x=l$ 时，$y=0$。有：

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{ql^3}{24} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

梁的转角方程和挠曲线方程分别是，

$$\theta = y' = -\frac{q}{24EI}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3)$$

$$y = -\frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$$

当转角 θ 取最大值时，由驻值条件；$\theta' = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{q(lx - x^2)}{2EI} = 0$ 得：

x=0 或 l

此时，$\theta_{max} = \frac{ql^3}{24EI}$

当挠度 y 取最大值时，由驻值条件，

$$y' = \theta = -\frac{q}{24EI} \cdot (l^3 - 6lx^2 + 4x^3) = 0$$

$$x = \frac{l}{2}$$

此时，$y_{max} = \frac{5ql^4}{384EI}$

评注：求弯曲变形方程的步骤是：① 求出梁中弯矩随位置变化的函数 $M(x)$；② 根据梁的挠曲线近似微分方程式 $EIy''=M(x)$ 建立微分方程；③ 对微分方程进行积分得到转角方程和挠度方程；④ 利用边界条件获得以上各方程中的常数项。

【例 2】　在如图 6-5 所示坐标系中，等直梁的挠曲线方程是 $w = \frac{qx}{48EI} \cdot (L^3 - 3Lx^2 + 2x^3)$，试

求：

(1)最大弯矩及最大剪力；

(2)梁两端的约束情况；

(3)梁上承受的载荷情况。(东南大学,1999 年)

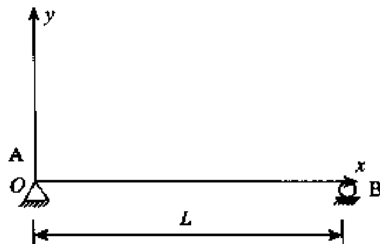


图 6-5

解 由直梁的挠曲线方程：$w = \frac{qx}{48\mathrm{EI}}(L^3 - 3Lx^2 + 2x^3)$

可求得其各阶段导数是：

$$w' = \frac{q}{48\mathrm{EI}} \cdot (L^3 - 9Lx^2 + 8x^3)$$

$$w'' = \frac{q}{24\mathrm{EI}} \cdot (-9Lx + 12x^2)$$

$$w''' = \frac{q}{24\mathrm{EI}} \cdot (-9L + 24x)$$

$$w'''' = \frac{q}{\mathrm{EI}}$$

根据荷载集度、剪力和弯矩之间的微分关系，由上述诸式分别得到弯矩、剪力和载荷集度的方程为：

$$M(x) = \mathrm{EI}V'' = \frac{q}{24}(-9Lx + 12x^2)$$

$$Q(x) = \mathrm{EI}V''' = \frac{q}{24}(-9L + 24x)$$

$$q(x) = \mathrm{EI}V'''' = q$$

当 $x=0$；$V(0) = 0, M(0) = 0, Q(0) = -\frac{3qL}{8}$

当 $x=L$ 时；$V(L) = 0, M(L) = \frac{qL^2}{8}, Q(L) = \frac{5qL}{8}$

于是看出：

(1)直梁是一两端铰支的简支梁，支反力分别是 $Y_A = -\frac{3qL}{8}(\downarrow)$，$Y_B = \frac{-5qL}{8}(\downarrow)$；

(2)梁中弯矩有极值发生在 $Q(x)=0$ 处，即

$$\frac{q}{24}(-9L + 24x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3L}{8}$$

而 $M(\frac{3}{8}L) = \frac{q}{24} \cdot \left[-9L \cdot \frac{3L}{8} + 12 \cdot (\frac{3L}{8})^2\right] = -\frac{9qL^2}{128}$

因为 $\left|M(\frac{3}{8}L)\right| < \frac{qL^2}{8}$

所以 $M_{\max} = \frac{qL^2}{8}$，$Q_{\max} = Y_B = \frac{5}{8}qL$

(3)梁上施加的载荷有均匀分布的载荷 q 和 B 端集中力偶 $\frac{qL^2}{8}$(↑)。梁的简图如图 6-7 所示：

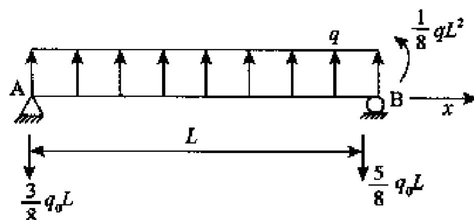


图 6-6

评注：由挠曲线近似微分方程 $EIV''=M(x)$，再根据载荷集度，剪力与弯矩之间的微分关系式，即 $\frac{dM(x)}{dx}=Q(x)$，$\frac{dQ(x)}{dx}=q(x)$，所以 $EIV'''=Q(x)$，$EIV''''=q(x)$，综合利用以上公式，本题可解。

【例 3】 如图 6-7 所示，梁均布载荷 q 作用，梁的抗弯刚度 EI 是常量，且 q 和 l 均为已知。从强度考虑为了能使梁的受力最合理，试求支座 A 应上移的距离 Δ。(略去剪切变形的影响)(东南大学，2001 年)

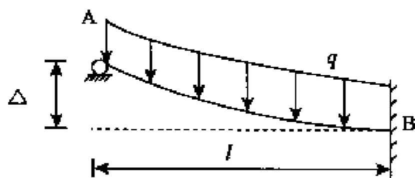


图 6-7

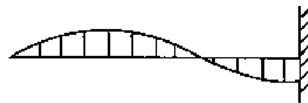


图 6-8

解 弯矩图如图 6-8 所示，令支座 A 的支反力是 R_A，则离支座 A 端距离为 x 的截面弯矩是：

$$M(x) = R_A \cdot x - \frac{1}{2}q \cdot x^2$$

当弯矩 $M(x)$ 取极值时，由驻值条件，

$$\frac{dM(x)}{dx} = R_A - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{R_A}{q}$$

此时 $M(x) = R_A \cdot \frac{R_A}{q} - \frac{1}{2}q \cdot (\frac{R_A}{q})^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_A^2}{q}$

而固定端 B 的弯矩是：$M(l) = R_A l - \frac{1}{2}q \cdot l^2$

若使此梁的受力最合理，则梁上正负弯矩的绝对值应该相等，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{R_A^2}{q}+R_A l-\frac{1}{2}q\cdot l^2=0\Rightarrow R_A=(\sqrt{2}-1)ql$$

通过挠曲线近似微分方程，

$$M(x)=(\sqrt{2}-1)ql\cdot x-\frac{1}{2}qx^2=-\mathrm{EI}V''$$

积分得到转角和挠度方程，

$$\mathrm{EI}V'=\frac{1}{2}q\cdot\frac{1}{3}x^3-(\sqrt{2}-1)ql\cdot\frac{1}{2}x^2+C_1$$

$$\mathrm{EI}V=\frac{1}{2}q\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4-(\sqrt{2}-1)ql\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$$

由边界条件：当 $x=0$ 时，$V=-\Delta$；当 $x=l$ 时，$V=0$，$V'=0$

得到积分常数是：

$$C_1=\frac{3\sqrt{2}-4}{6}\cdot ql^3,C_2=\frac{11-8\sqrt{2}}{24}\cdot ql^4$$

且有：

$$\Delta=\frac{C_2}{-\mathrm{EI}}=\frac{8\sqrt{2}-11}{24}\cdot\frac{ql^4}{\mathrm{EI}}$$

评注：本题源于一道全国力学竞赛题，只要抓住梁上正、负弯矩相等这个条件，问题便很容易得到解决。

【例 4】 如图 6-9 所示，求图示梁的支座反力，绘梁的剪力图与弯矩图。（华东理工大学，2000 年）

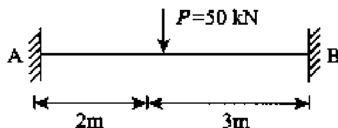


图 6-9

解 梁有两个多余约束，为二次超静定结构，去除多余约束，其基本静定体系如图 6-10 所示：

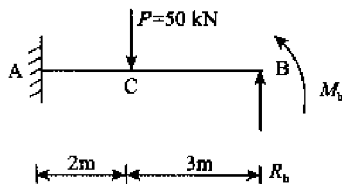


图 6-10

在力 P 作用下，B 截面产生的竖向位移 Δ_{B1} 和转角 θ_{B1} 分别是：

$$\Delta_{B1}=\frac{P\cdot 2^3}{3\mathrm{EI}}+\frac{P\cdot 2^2}{2\mathrm{EI}}\cdot 3=\frac{26P}{3\mathrm{EI}}=\frac{1300}{3\mathrm{EI}}(\downarrow)$$

$$\theta_{B1}=\frac{P\cdot 2^2}{2\mathrm{EI}}=\frac{50\times 4}{2\mathrm{EI}}=\frac{100}{\mathrm{EI}}(\downarrow)$$

在支反力 R_B 作用下，截面 B 的竖向位移 Δ_{B2} 和转角 θ_{B2} 是：

$$\Delta_{B2}=\frac{R_B\cdot 5^3}{3EI}=\frac{125R_B}{3EI}(\uparrow)$$

$$\theta_{B2}=\frac{R_B\cdot 5^2}{2EI}=\frac{25R_B}{2EI}(\curvearrowleft)$$

在支反力 M_B 作用下，截面 B 的竖向位移 Δ_{B3} 和转角 θ_{B2} 是：

$$\Delta_{B3}=\frac{M_B\cdot 5^2}{2EI}=\frac{25M_B}{2EI}(\uparrow)$$

$$\theta_{B3}=\frac{M_B\cdot 5}{EI}=\frac{5M_B}{EI}(\curvearrowleft)$$

由于

$$\begin{cases}\Delta_B=\Delta_{B1}+\Delta_{B2}+\Delta_{B3}=\dfrac{1300}{3EI}-\dfrac{125R_B}{3EI}-\dfrac{25M_B}{2EI}=0\\ \theta_B=\theta_{B1}+\theta_{B2}+\theta_{B3}=\dfrac{100}{EI}-\dfrac{25R_B}{2EI}-\dfrac{5M_B}{EI}=0\end{cases}$$

解出，$M_B=-24\text{kN}\cdot\text{m}, R_B=17.6\text{kN}$

由平衡条件 $\sum F=0$ 和 $\sum M_A=0$ 得到

$$\begin{cases}R_A+R_B-50=0\\ M_A+50\times 2-M_B-R_B\cdot 5=0\end{cases}$$

解出 $R_A=32.4\text{kN}, M_A=-36\text{kN}\cdot\text{m}$

剪力图和弯矩图用前述方法可以绘出如图 6-11 所示。

评注：超静定结构的基本静定体系可以有多种。

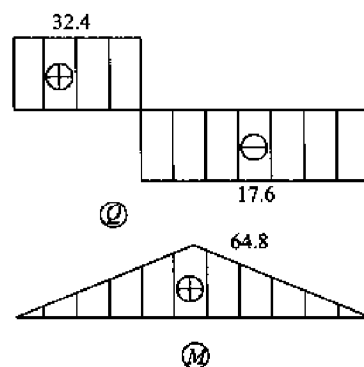


图 6-11

【例 5】 如图 6-12 所示梁 ABC，在梁 C 处有一个弹簧支撑，弹簧刚度 $K=\dfrac{3EI}{a^3}$。已知材料的弹性模量 E 和截面惯性矩 I 均是常数。求 C 处的约束反力和 A 端的转角 θ_A，并画出剪力图和弯矩图。

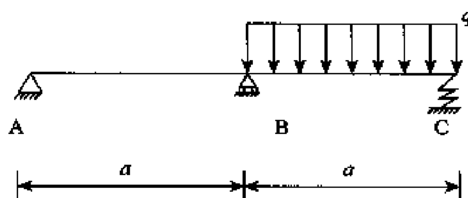


图 6-12

解 此结构是一次超静定结构，解除弹簧约束，代之以约束反力 R_C，如图 6-13 所示，

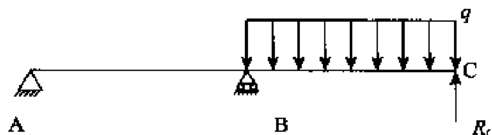


图 6-13

将图 6-13 所示结构分解成两个独立结构的叠加如图 6-14 所示，

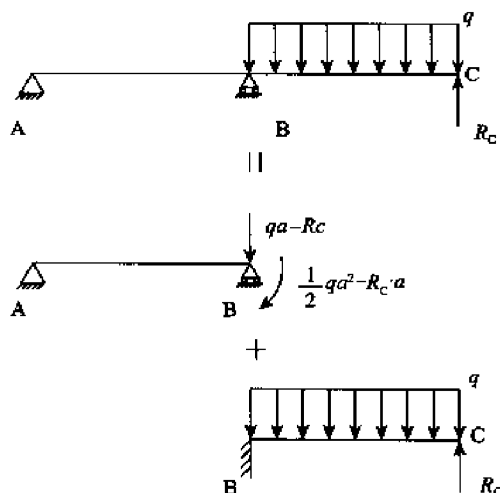


图 6-14

从图中，C 点的位移是，

$$\Delta_C=\theta_B\cdot a+\frac{qa^4}{8EI}+\frac{R_Ca^3}{3EI}=\frac{\left(\frac{1}{2}qa^2-R_C\cdot a\right)\cdot a^2}{3EI}+\frac{qa^4}{8EI}-\frac{R_Ca^3}{3EI}$$

$$=\frac{7qa^2}{24EI}-\frac{2R_C\cdot a^3}{3EI}(\downarrow) \qquad ①$$

而 C 点的位移应等于弹簧的压缩量，即 $\Delta_C=\frac{R_C}{K}=\frac{R_Ca^3}{3EI}$ ②

比较①式和②式得到：$R_C=\frac{7}{24}qa(\uparrow)$

由平衡条件 $\sum F=0$ 和 $\sum M_A=0$ 得到：

$$\begin{cases}R_A+R_B=qa-R_C=\frac{17}{24}qa\\(qa-R_C)a+\frac{1}{2}qa^2-R_C\cdot a-R_B\cdot a=0\end{cases}$$

解出 $\begin{cases}R_A=\frac{-5}{24}qa & (\downarrow)\\R_B=\frac{11}{12}qa & (\uparrow)\end{cases}$

于是，A 端的转角是，$\theta_A=\frac{(\frac{1}{2}qa^2-R_C\cdot a)a}{6EI}=\frac{5qa^3}{144EI}$（沿逆时针方向）

原结构的内力图如下：

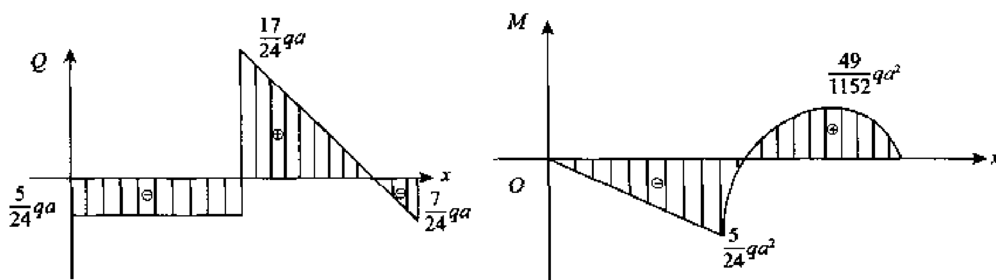


图 6-15

评注：对于含弹簧支撑的超静定结构，其变形协调条件是弹簧支撑处变形等于弹簧变形量，读者要注意掌握。

【例 6】 一等截面(EI＝常量)、两端固定的梁 AB、其右端转过一微小角度 θ，如图 6-16 所示。试求梁的支座反力。(北京大学，1999 年)

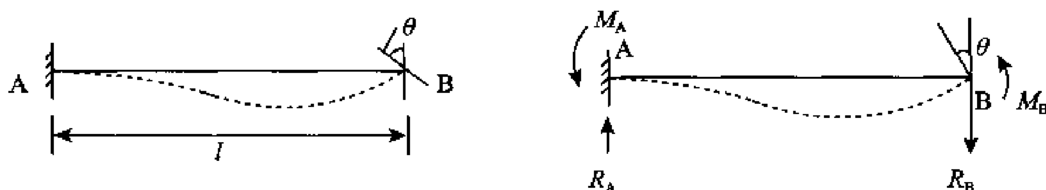


图 6-16

解 以支座 B 作为多余约束，静定系统如图所示，则对于静定系统，有：

B 点垂直位移是：$\Delta_B = \frac{M_B l^2}{2EI} - \frac{R_B l^3}{3EI}$

B 点转角是：$\theta_B = \frac{M_B l}{EI} - \frac{R_B l^2}{2EI}$

而对比静定系统和原结构，由变形协调条件，$\Delta_B = 0, \theta_B = \theta$

即：$\frac{M_B l^2}{2EI} - \frac{R_B l^3}{3EI} = 0$，$\frac{M_B l}{EI} - \frac{R_B l^2}{2EI} = \theta$

解出，$R_B = \frac{6EI\theta}{l^2}$(↓)， $M_B = \frac{4EI\theta}{l}$(↖)

由平衡方程 $\sum F = 0$ 和 $\sum M_A = 0$ 得到

$$\begin{cases} R_A + R_B = 0 \\ M_A + M_B - R_B l = 0 \end{cases}$$

解出 $R_A = -\frac{6EI\theta}{l^2}$(↑)，$M_A = \frac{2EI\theta}{l}$ (↖)

评注：支座位移在结构中形成附加内力，这在工程中十分多见，如地基沉降等。

【例 7】 如图 6-17 所示梁 B 为铰链。已知抗弯刚度为 EI，P，l 也已知，求 D 的挠度。(哈尔滨工业大学，2000 年)

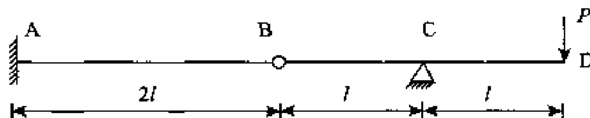


图 6-16

解　将原结构的铰链 B 解开，视其为悬臂梁 AB 和外伸当梁 BD 的叠加，如图 6-18 所示，

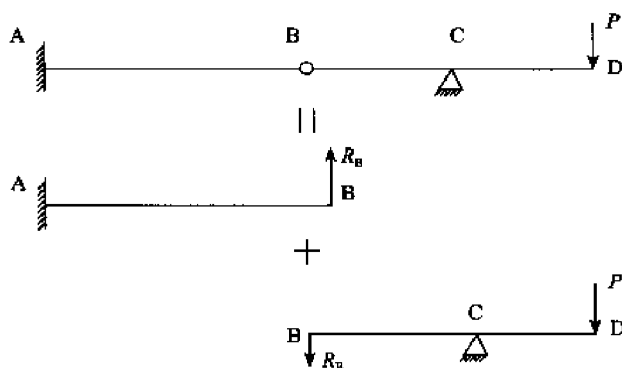


图 6-18

由平衡条件 $\sum M_C = 0$ 得到：$R_B \cdot l - P \cdot l = 0 \Rightarrow R_B = P$（↓）

悬臂梁 AB 在 $R_B = P$ 的作用下，B 端产生的竖直位移是：

$$\Delta_B = \frac{P \cdot (2l)^3}{3EI} = \frac{8Pl^3}{3EI} \qquad (\uparrow)$$

如图 6-19 所示，由于 B 端的竖直位移在 D 点产生的挠度是：

$$\Delta_{D1} = \Delta_B = \frac{8Pl^3}{3EI} \qquad (\downarrow)$$

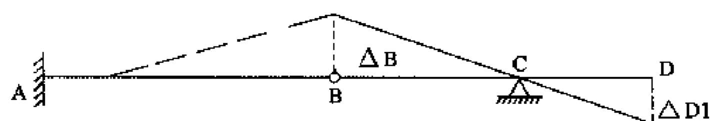


图 6-19

外伸梁 BD 在力 P 作用下的变形可以分解成两部分的叠加如图 6-20 所示：

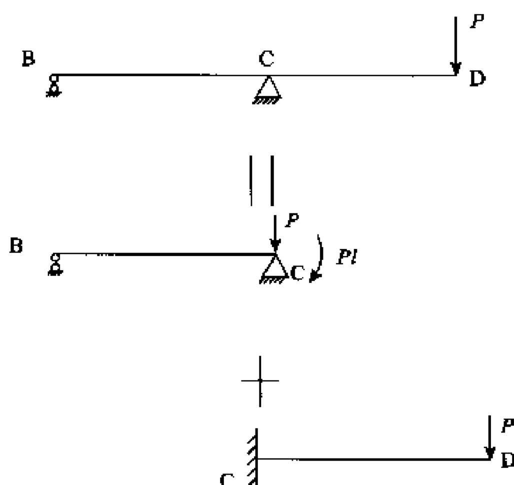


图 6-20

简支梁 BC 在力偶 Pl 作用下，C 点产生的转角是：$\theta_C = \dfrac{Pl \cdot l}{3EI} = \dfrac{Pl^2}{3EI}$　（↙）

由 C 点转角在 D 点产生的位移是：$\Delta_{D2}=\theta_C\cdot l=\frac{Pl^3}{3EI}$ （↓）

悬臂梁 CD 在集中力 P 作用下的位移是：$\Delta_{D3}=\frac{Pl^3}{3EI}$（↓）

所以，D 点的位移是：$\Delta_D=\Delta_{D1}+\Delta_{D2}+\Delta_{D3}=\frac{8Pl^3}{3EI}+\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{Pl^3}{3EI}=\frac{10Pl^3}{3EI}$ （↓）

评注：本题还可以用积分的方法解答，但不及"叠加法"方便、直观。对于应试而言，笔者更倾向"叠加法"。

【例 8】 如图 6-21 所示，设梁上受到均布切向荷载，其集度是 q，梁的截面是矩形，弹性模量为 E，试求 A 点的垂直位移和水平位移。（武汉大学，2001 年）

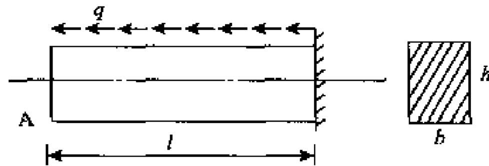


图 6-21

解 （方法一）

在 A 点加一竖向单位力，如图 6-22 所示。任意截面 x 处的载荷、竖向单位力的弯矩方程和轴力方程分别是，

$$\begin{cases}M(x)=-q\cdot\frac{hx}{2}\\N(x)=q\cdot x\end{cases},\begin{cases}M_0(x)=-x\\N_0(x)=0\end{cases}$$



图 6-22

于是，由莫尔积分，得到 A 点垂直位移

$$\delta_y=\frac{1}{EI}\cdot\int M(x)\,M_0(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{EA}\cdot\int N(x)N_0(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^l(-q\cdot\frac{hx}{2})\cdot(-x)\cdot dx=\frac{qhl^3}{6EI}=\frac{2ql^3}{Ebh^2}(\downarrow)$$

同理，在 A 的轴向加一单位力。任意截面 x 处的载荷，水平单位力的弯矩方程和轴力分别是，

$$\begin{cases}M(x)=-q\cdot\frac{h}{2}\cdot x\\N(x)=q\cdot x\end{cases},\begin{cases}M_0(x)=\frac{h}{2}\\N_0(x)=1\end{cases}$$

于是，A 点的轴向位移是，

$$\delta_x=\frac{1}{EI}\cdot\int M(x)M_0(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{EA}\cdot\int N(x)\cdot N_0(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^l(-q\cdot\frac{h}{2}\cdot x)(\frac{h}{2})\mathrm{d}x+\frac{1}{EA}\cdot\int_0^l(q\cdot x)\cdot 1\cdot\mathrm{d}x=\frac{-qh^2l^2}{8EI}+\frac{ql^2}{2EA}$$

$$=\frac{-3ql^2}{2Ebh}+\frac{ql^2}{2Ebh}=-\frac{ql^2}{Ebh}(\rightarrow)$$

（方法二）

如图 6-23 所示，任意截面 x 处的轴力和弯矩是，

$$\begin{cases}N(x)=qx\\ M(x)=-\frac{qh}{2}\cdot x\end{cases}$$

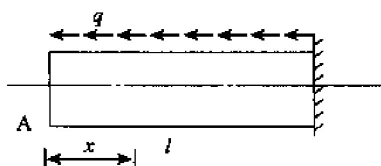


图 6-23

由挠曲线的近似微分方程，有：$EIV''=M(x)=\frac{qh}{2}\cdot x$

积分得到梁的转角和挠度方程是，

$$EIV'=\frac{qh}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$EIV=\frac{qh}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$$

由边界条件：$x=L$ 时，$V'=0$；$x=L$ 时，$V=0$。

得到：$C_1=+\frac{qhl^2}{4}$，$C_2=-\frac{qhl^3}{6}$

那么对于 A 点，即 $x=0$，有

$$\begin{cases}V_A=\frac{C_2}{EI}=-\frac{qhl^3}{6EI}(\downarrow)\\ \theta_A=V'_A=\frac{C_1}{EI}=\frac{qhl^2}{4EI}(\nwarrow)\end{cases}$$

由于轴向拉伸引起的 A 点的水平位移是：$\Delta_{A1}=\int_0^l\frac{N(x)}{EA}\cdot dx=\int_0^l\frac{qx}{EA}\cdot dx=\frac{ql^2}{2EA}(\leftarrow)$

由于弯曲引起的 A 点水平位移是：$\Delta_{A2}=\theta_A\cdot\frac{h}{2}=-\frac{qh^2l^2}{8EI}(\rightarrow)$

所以，A 点的水平位移是：$\Delta_A=\Delta_{A1}+\Delta_{A2}=\frac{ql^2}{2EA}-\frac{qh^2l^2}{8EI}$

A 点垂直位移是：$V_A=-\frac{qhl^3}{6EI}(\downarrow)$

其中 $A=bh$，$I=\frac{1}{12}bh^3$ 代入上述结果，

$$\Delta_A=\frac{ql^2}{2Ebh}-\frac{qh^2l^2}{8\cdot E\cdot\frac{1}{12}bh^3}=-\frac{ql^2}{Ebh}\text{（负号表示水平向左）}$$

$$V_A=-\frac{qhl^3}{6E\cdot\frac{1}{12}bh^3}=\frac{2ql^3}{Ebh^2}\text{（方向向下）}$$

评注：莫尔积分作为一种能量方法，来之于功的互等定理，在求解结构位移时，是一种十分有效的方法，读者要熟练掌握。

【例 9】 如图 6-24 所示两悬臂梁 AB、CD 经杆 CB 连接。已知二梁的惯性矩均是 I，杆的横截面积为 A，且三者材料相同。若 I、A、q、a 为已知，试求杆 CB 的内力。（吉林大学，2000 年）

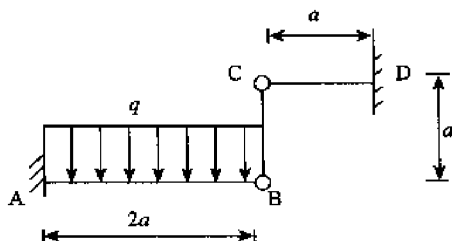


图 6-24

解 对于一次超静定结构，解除杆 BC 的约束，代之以力 R_{BC} 如图 6-25 所示，

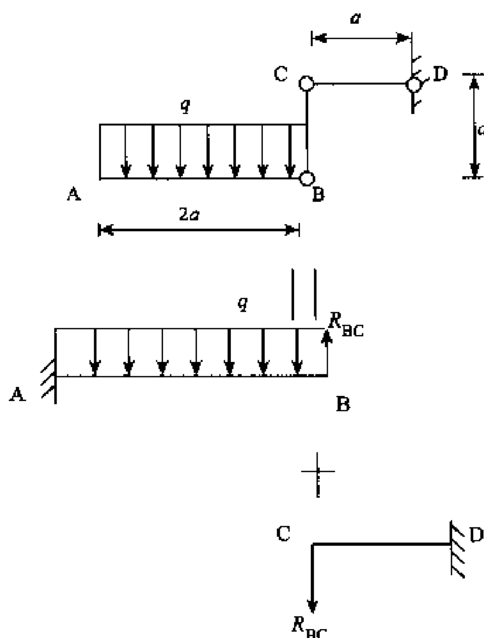


图 6-25

悬臂梁 AB 在均布载荷 q 的作用下，B 点挠度是：$\Delta_{B1}=\dfrac{q\cdot(2a)^4}{8EI}=\dfrac{2qa^4}{EI}(\downarrow)$

悬臂梁 AB 在 R_{BC} 的作用下，B 点挠度是：$\Delta_{B2}=\dfrac{R_{BC}\cdot(2a)^3}{3EI}=\dfrac{8R_{BC}a^3}{3EI}(\uparrow)$

悬臂梁 AB 上 B 点挠度是：$\Delta_B=\Delta_{B1}-\Delta_{B2}=\dfrac{2qa^4}{EI}-\dfrac{8R_{BC}a^3}{3EI}(\downarrow)$ ①

悬臂梁 CD 上 C 点挠度是：$\Delta_C=\dfrac{R_{BC}a^3}{3EI}(\downarrow)$ ②

而由变形协调知：$\Delta_B-\Delta_C=\Delta l_{BC}$ ③

且由物理条件：$\Delta l_{BC}=\dfrac{R_{BC}\cdot a}{EA}$ ④

联合①②③④式解出：$R_{BC}=\dfrac{2q\cdot A\cdot a^4}{aI+3Aa^3}$（拉力）

评注：这是一道基础题，抓住变形协调条件 $\Delta_B - \Delta_C = \Delta l_{BC}$，问题便一目了然。

【例 10】 材料相同，宽度相同，厚度分别为 h_1 和 h_2 的两块板叠合(无摩擦)在一起的简支梁，承受均布载荷 q，如图 6-26 所示。试求该梁中点的挠度 y_C。(上海交通大学，2001 年)

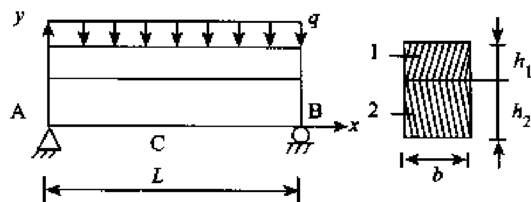


图 6-26

解 两梁之间无摩擦，因此会产生错动。梁整体横截面的平面假设不成立。而上、下板自满足平面假设，各自有自己的中性层。

假定上、下梁的中性层曲率半径相同，则

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_1(x)}{E_1 I_1} = \frac{M_2(x)}{E_2 I_2} \qquad ①$$

其中，$I_1 I_2$ 是各板对自己中性轴的惯性矩。静力条件给出

$$M_1(x) + M_2(x) = M(x) = \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{2}qx^2 \qquad ②$$

由①②两式解出

$$\begin{cases} M_1(x) = \dfrac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \cdot M(x) \\ M_2(x) = \dfrac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \cdot M(x) \end{cases}$$

由挠曲线近似微分方程：$E_i I_i y''_i = M_i = \dfrac{E_i I_i}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \cdot M(x) \qquad (i = 1, 2)$

知上下梁的挠曲线相同，即：$y''_1 = y''_2 = \dfrac{M(x)}{EI_1 + EI_2}$

利用简支梁受均布载荷时中点的挠度公式：$y_c = \dfrac{-5qL^4}{384EI} = \dfrac{-5qL^4}{32Eb(h_1^3 + h_2^3)}$

评注：叠合梁的变形相当于抗弯刚度为各板的抗弯刚度之和的单一梁变形。

【例 11】 一固端梁，其一端相对另一端沿横向移动了距离 Δ(图 6-27(a))，试求梁的反力。(北京大学)

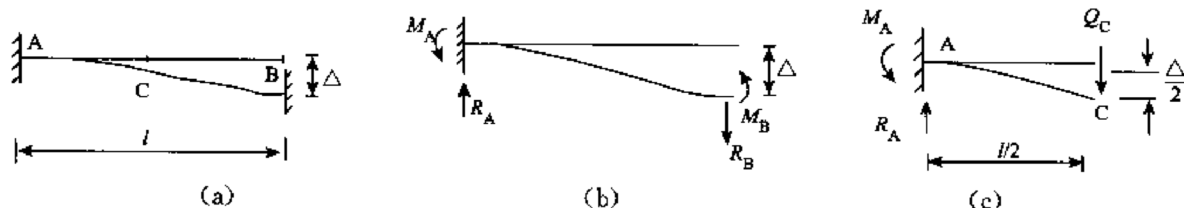


图 6-27

解 解法一：(1)支座 B 为多余约束，取静定系统如图 6-27(b)，比较静定系统与原梁的变形，由变形协调条件，$u_B = \Delta, \theta_B = 0$，用叠加法求出 u_B 和 θ_B，得补充方程

$$\begin{cases}\dfrac{M_B l^2}{2EI}-\dfrac{R_B l^3}{3EI}=-\Delta \\ \dfrac{M_B l}{EI}-\dfrac{R_B l^2}{2EI}=0\end{cases}$$

联立求解，得：$R_B=\dfrac{12EI\Delta}{l^3}(\downarrow)$　$M_B=\dfrac{6EI\Delta}{l^2}(\curvearrowleft)$

由静定平衡方程

$$\sum Y=0 \quad R_A=R_B=\frac{12EI\Delta}{l^3}(\uparrow)$$

$$\sum M_A=0 \quad M_A=-M_B+R_B l=\frac{6EI\Delta}{l^2}(\curvearrowleft)$$

解法二：本题是对称结构产生了反对称的变形，显然，对称截面 C 处的挠度 $u_c=\frac{1}{2}\Delta$ 且在对称截面 C 处只有剪力 Q_C，弯矩等于零。从对称截面 C 处截开，取 AC 段为研究对象，受力如图 6-26(c)所示。

由 $u_C=\dfrac{Q_C\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI}=\dfrac{\Delta}{2}$ 得 $Q_C=\dfrac{12EI\Delta}{l^3}$

由 AC 段的平衡条件可得：$R_A=Q_C=\dfrac{12EI\Delta}{l^3}(\uparrow)$

$$M_A=Q_C\cdot\frac{l}{2}=\frac{6EI\Delta}{l^2}(\curvearrowleft)$$

由全梁的平衡条件，得

$$R_B=R_A=\frac{12EI\Delta}{l^3}(\downarrow) \quad M_B=-M_A+R_A l=\frac{6EI\Delta}{l^2}(\curvearrowleft)$$

第三节　习　题

一、填空题

1. 简支梁如图 6-28 所示，支座 B 为弹簧支撑，弹簧刚度是 k。当用积分法求梁的位移时，确定积分常数的支撑条件是________、________；连续条件是________、________。

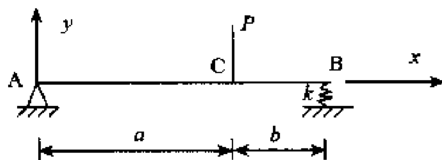


图 6-28

2. 已知如图 6-29 所示的梁在 m 单独作用下，C 截面的挠度为 3mm(↓)，则在 P 单独作用下 D 截面的转角为____________转向为____________。

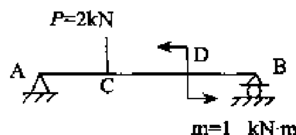


图 6-29

3. 两根材料相同的棱柱形梁，几何相似，第二根杆的尺寸是第一根杆的 n 倍，两根梁的支座相同，且承受的荷载仅为自重，两根梁的相应挠度的比值是________。（重庆大学，2003 年）

4. 两根梁尺寸、受力和支撑完全相同，但材料不同，弹性模量分别是 E_1 和 E_2，且 $E_1 = 7E_2$，则两根梁的挠度之比 f_1/f_2 是________。（长安大学，2001 年）

5. 若已知某直梁的抗弯截面刚度为常数，挠曲线的方程为 $w(x)=cx^4$，则该梁在 $x=0$ 处的约束和梁上载荷情况分别是________。

6. 应用叠加原理求位移时应满足的条件是________。

二、选择题

1. 已知边长为 a 的正方形截面对 z_1 轴的惯性矩为 I_1，对形心轴 z_C 的惯性矩为 I_0，则 z_1 轴与 z_C 轴的距离 d 为________。

A. I_1-I_0　　B. $\frac{\sqrt{I_1-I_0}}{a}$　　C. $\frac{\sqrt{I_1+I_0}}{a}$　　D. I_1+I_0

2. 如图 6-30 所示，悬臂梁的抗弯刚度为 EI，在其下面为一半径为 R 的圆柱面。若使梁弯曲变形后恰好和圆柱面贴合，但无接触压力，则梁上所受的荷载为________。

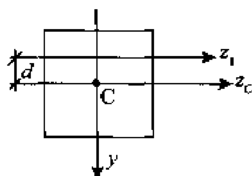


图 6-30

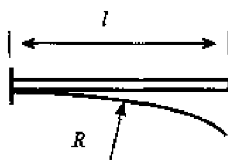


图 6-31

A. 在全梁加竖直向下的均布荷载 $q=\frac{EI}{Rl^2}$

B. 在自由端加竖直向下的集中力 $P=\frac{EI}{Rl}$

C. 在自由端加顺时针转向的力偶矩 $M=\frac{EI}{R}$

D. 在自由端加逆时针转向的力偶矩 $M=\frac{EI}{R}$

3. 梁的挠度是________。

A. 横截面上任一点沿梁轴垂直方向的线位移

B. 横截面形心沿梁轴垂直方向的线位移

C. 横截面形心沿梁轴方向的线位移

D. 横截面形心的位移

4. 梁挠曲线近似微积分方程 $w''=M(x)/EI$，I 在________条件下成立。

A. 梁的变形属小变形　　　　B. 材料服从胡克定律

C. 挠曲线在 xoy 面内　　　　　　D. 同时满足 A、B、C

5. 在利用积分法计算梁位移时，待定的积分常数主要反映了(　　)。

A. 剪力对梁变形的影响　　　　　B. 对近似微分方程误差的修正

C. 支撑情况对梁变形的影响　　　D. 梁截面形心轴向位移对梁变形的影响

6. 若两根梁的长度 L、抗弯截面刚度 EI 及弯曲内力图均相等，则在相同的坐标系中梁的________。

A. 挠度方程 $w(x)$ 一定相同，曲率方程 $1/\rho(x)$ 不一定相同

B. $w(x)$ 不一定相同，$1/\rho(x)$ 一定相同

C. $w(x)$ 和 $1/\rho(x)$ 均相同

D. $w(x)$ 和 $1/\rho(x)$ 均不一定相同

7. 已知等截面直梁在某一段上的挠曲线方程为 $w(x)=Ax^2(4lx-6l^2-x^2)$，则该段梁上________。

A. 无分布载荷作用　　　　　　　B. 有均布载荷作用

B. 分布载荷是 x 的一次函数　　　D. 分布载荷是 x 的二次函数

三、判断题

1. 如图 6-32 所示，悬臂架在 B 处有集中力作用，则 AB，BC 都产生了位移，同时 AB，BC 也都发生了变形。(　　)

图 6-32

2. 梁转角是横截面绕中性轴转过的角位移。(　　)

3. 等截面直梁在弯曲变形时，挠曲线曲率在最大弯矩处一定最大。(　　)

4. 弯矩为零的截面曲率必为零。(　　)

四、计算题

1. 如图 6-33 所示，总长度为 l，抗弯刚度为 EI 的悬臂梁 AB 承受分布载荷 q，试用能量法求截面 B 的挠度和转角。

图 6-33

2. 宽度为 b，高度为 h 的矩形截面梁，受力如图 6-34 所示，试求 B 点和 C 点的水平位移。



图 6-34

3. 矩形等直悬臂梁 AB 如图 6-35 所示，在集中力 P 作用下测得 C 截面上、下边缘的纵向应变为 ε，试求 B 端挠度的表达式。

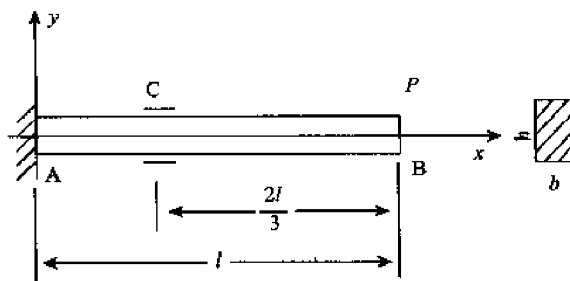


图 6-35

4. 如图 6-36 所示中两根梁的 EI 相同，且等于常量。两梁由铰链相互连接。试求 P 力作用点 D 的位移。

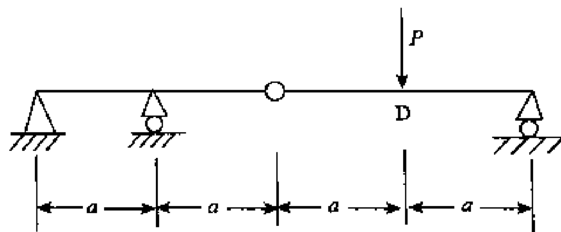


图 6-36

5. 如图 6-37 所示的简支梁，上、下两层材料相同，若两层间的摩擦力忽略不计，当梁承受均匀载荷 q 时，试求两层中最大正应力的比值。

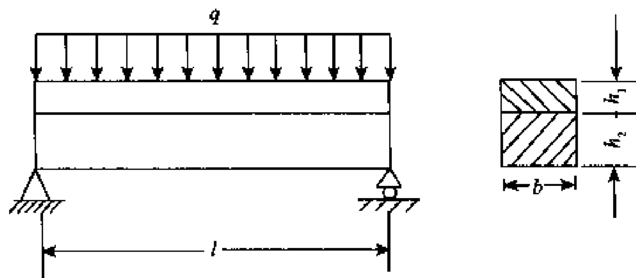


图 6-37

第 7 章　应力和应变分析　强度理论

知识要点

本章主要介绍了应力和应变分析以及强度理论的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)平面应力状态分析——解析法与图解法；

(2)三向应力状态；

(3)位移与应变分量；

(4)平面应变状态分析；

(5)广义胡克定律；

(6)复杂应力状态的变形比能；

(7)四种常用强度理论及莫尔强度理论。

第一节　本章内容总结

1. 平面应力状态分析——解析法

两个主应力不等于零者称为平面应力状态，图 7-1a 所示为单元体平面应力状态的一般情况，任意斜截面上的应力(如图 7-1b、c)可表示为：

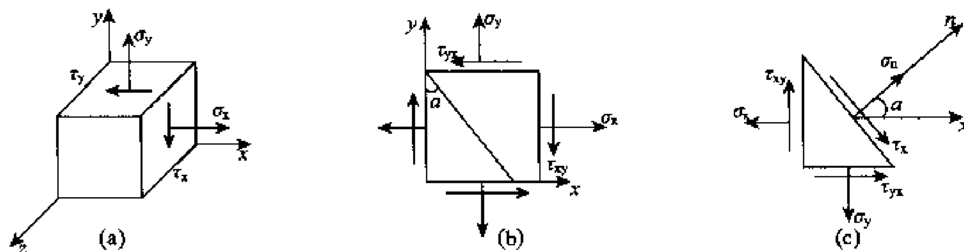


图 7-1

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

主应力和主方位角：

主应力大小：$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

主平面方位角：$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

z 面上正应力是零，说明对于平面应力状态有一个主应力是零，另外还有两个主应力就是

上式表示的 σ_{max} 和 σ_{min}。用 σ_1、σ_2 和 σ_3 表示三个主应力，并规定按其代数值，最大者是 σ_1；最小者是 σ_3，即 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$。

切应力的极值，称为主切应力：

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

主切应力所在的面称为主切平面，主切平面的方位角为：

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

主切应力等于主应力之差的一半：

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

2. 平面应力状态分析——图解法

应力圆图解如图 7-2 所示，应力圆与单元体的对应关系为：

(1)点面对应：应力圆上某一点的坐标值，分别对应着单元体上某一方位面上的正应力与切应力；

(2)转向对应：应力圆半径旋转时，单元体上的坐标轴应沿相同转向旋转；二倍角对应：应力圆上的角度是相应单元体上角度的 2 倍；

(3)应力符号对应：单元体上正号正应力，在应力圆上位于纵坐标轴的右方，反之位于左方；使单元体有逆时针旋转趋势的切应力，在应力圆上位于横坐标轴的下方，反之位于上方。

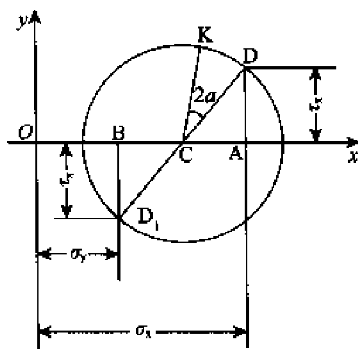


图 7-2

3. 三向应力状态分析

三个主应力都不等于零者为三向应力状态，任意斜截面上的应力：

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl$$

$$\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2 - \sigma_n^2}$$

其中，斜截面外法线方位角的方向余弦分别用 l、m 和 n 来表示。主应力和主方向：

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

上式的系数 I_1、I_2、I_3 均不变，分别称为一点应力状态的第一、第二、第三不变量。解以上特征方程式可得三个实根，称为特征值，即三个主应力 σ_1、σ_2、σ_3。再由这三个主应力容易得到三

个主方向的方向余弦(l_1^*、m_1^*、n_1^*)、(l_2^*、m_2^*、n_2^*)、(l_3^*、m_3^*、n_3^*)。

4. 平面应变状态分析

任意斜截面上的应变：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos\alpha-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin2\alpha\\\frac{\gamma_\alpha}{2}&=\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin2\alpha+\frac{\gamma_{xy}}{2}\cos2\alpha\end{aligned}\right\}$$

主应变和主方向：

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{max}\\\varepsilon_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan2\alpha_x=-\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

切应变的极值，称为主切应变：

$$\gamma_{max}=\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2}$$

主切应力所在的面称为主切平面，主切平面的方位角为：

$$\tan2\alpha_x=\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{\gamma_{xy}}$$

5. 平面应变状态分析 － 图解法

类似于平面应力状态图解分析方法，会得到应变圆方程：

$$(\varepsilon_x-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2})^2+(\frac{\gamma_{xy}}{2})^2=(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2})^2+(\frac{\gamma_{xy}}{2})^2$$

作图时以横坐标表示线应变，纵坐标表示切应变的二分之一。

6. 各向同性材料的广义胡克定律

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\\varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]\\\varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\\\gamma_{xy}&=\frac{\tau_{xy}}{G}\\\gamma_{yz}&=\frac{\tau_{yz}}{G}\\\gamma_{zx}&=\frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\right\}$$

若微元体的三个主应力已知时，其应力(应变关系可写成：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]\\ \varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]\\ \varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]\end{aligned}\right\}$$

式中 ε_1、ε_2、ε_3 分别为沿主应力方向的线应变。由于主应力单元体在三个坐标平面内的切应变等于零，故主应力方向的线应变称为主应变。

7. **变形比能**

储存在单元体内的变形能一般亦称应变能。单位体积中积蓄的应变能称为应变比能或应变能密度。

单向应力状态下的应变能：$e=\frac{dE}{dV}=\frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x$

纯切应力状态下的应变能：$e=\frac{dE}{dV}=\frac{1}{2}\tau_{yx}\gamma_{yx}=\frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}$

空间应力状态下的应变能等于各应力分量分别在自己方向的应变上所做功的代数和：

$$e=\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_3+\sigma_3\varepsilon_3)$$

总应变比能 e 等于体积应变比能 e_v 和形状应变比能 e_f 的总和。体积应变比能等于三个坐标轴方向的平均应力 σ_m 在自己方向的应变 ε_m 上所做功的代数和，即

$$e_v=3\left[\frac{1}{2}\sigma_m\varepsilon_m\right]$$

应用体积应变胡克定律式得到，

$$e_v=\frac{\sigma_m^2}{2K}=\frac{3(1-2\mu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right)^2=\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

于是，形状应变比能，

$$e_f=e-e_v=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]-\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$=\frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_3\sigma_1)$$

$$=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

8. **强度理论**

第一强度理论：即最大拉应力理论，把材料脆断失效的主要原因归结为最大拉应力。最大拉应力达到材料单向拉伸脆断时的极限拉应力值(即强度极限)，材料就发生脆断失效。

实验表明，脆性材料在平面或三向拉伸断裂时，该理论与实验结果相当吻合。当存在压应力，若材料仍发生脆性拉断失效时，与实验结果也接近；但若发生剪断时，该理论与实验结果不符合。材料脆断失效的判据是：

$$\sigma_1=\sigma_{1\mu}=\sigma_b$$

其中σ_1 为最大拉应力；

σ_b 为强度极限；

$\sigma_{1\mu}$单向拉伸最大应力值。

第二强度理论：即最大拉应变理论，把材料脆断失效的主要原因归结为最大拉应变。认为无论材料处于何种应力状态，只要最大拉应变达到材料单向拉伸脆断时的极限拉应变值，材料就发生脆断失效。

实验证明：脆性材料在双向拉伸一压缩应力状态下，且压应力值大于拉应力值时，该理论与实验结果大致吻合。材料脆断失效的判据变为：

$$\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_b$$

第三强度理论：即最大切应力理论，把材料屈服失效的主要原因归结为最大切应力。认为无论材料处于何种应力状态，只要最大切应力达到材料单向拉伸屈服时的极限最大切应力值，材料就发生屈服失效。材料屈服失效的判据为：

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s$$

第四强度理论：即形变应变能理论，把材料屈服失效的主要原因归结为形变应变能。认为无论材料处于何种应力状态，只要形变应变能达到材料单向拉伸屈服时的极限形变应变能，材料就发生屈服失效。材料屈服失效的判据变为：

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sigma_s$$

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1)已知平面应力状态，求斜截面上应力、主应力、主平面、主切应力及主切平面；

(2)用图解法求解平面应力状态；

(3)用解析方法求出平面应变状态的主应变及主应变方向，用应变圆求出最大切应变及其方向；

(4)已知点的各应变分量求该点的应力状态；

(5)利用各强度理论对构件进行强度校核；

(6)应变比能的概念考察以及相关计算。

【例 1】 二向应力状态的单元体如图 7-3 所示，已知 $\sigma_{45^\circ}=75\text{MPa}$，$\tau_{45^\circ}=25\text{MPa}$，求主应力。(上海交通大学，2002 年)

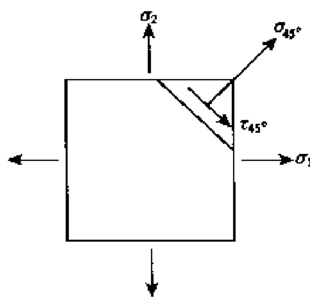


图 7-3

解 （方法一）

由斜截面上的应力公式有，

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot[\cos(2\times45^\circ)]-\tau_{xy}\cdot[\sin\cdot(2\times45^\circ)]$$

$$=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cdot\cos90^\circ-0\cdot\sin90^\circ$$

$$=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=75\text{MPa} \qquad ①$$

$$\tau_{45^\circ}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot[\sin(2\times45^\circ)]+\tau_{xy}\cdot[\cos(2\times45^\circ)]$$

$$=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cdot\sin90^\circ+0\cdot\cos90^\circ$$

$$=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=25\text{MPa} \qquad ②$$

联合①②解出 $\sigma_1=100\text{MPa},\sigma_2=50\text{MPa}$

（方法二）对于图示应力状态，作应力图如图 7-4 所示，

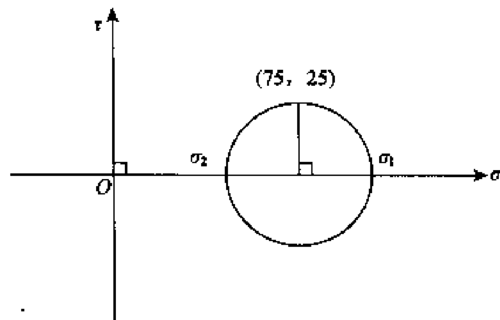


图 7-4

从图中则容易得到 $\sigma_1=75+25=100\text{MPa},\sigma_2=75-25=50\text{MPa}$

评注：应力圆在求解应力问题时，直观、方便，读者应熟练掌握这个有效的工具。对于斜截面上的应力公式，也要熟记在心。

【例 2】 受力杆件边缘上某点处于平面应力状态，过该点处的三个平面上的应力情况如图 7-5 所示，AB 为自由面。求 τ_x，并求出该点处的主应力及主平面位置。（河海大学，2002 年）

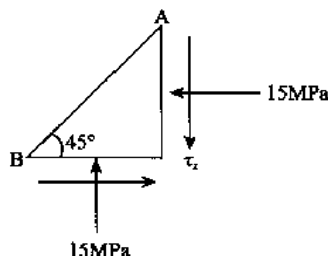


图 7-5

解 在自由面 AB 上，正应力 $\sigma_{45^\circ}=0$，由任意斜截面上应力公式有，

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot[\cos(-45^\circ\times2)]-\tau_x\cdot[\sin(-45^\circ\times2)]$$

$$=-15+0+\tau_x=0$$

$$\tau_x=15\text{MPa}$$

主应力大小是，

$$\begin{cases}\sigma_1=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=-15+15=0\\ \sigma_2=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=-15-15=-30(\text{MPa})\end{cases}$$

由主平面位置公式，

$$\tan(2\alpha_0)=\frac{-2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}=\pm\infty\Rightarrow 2\alpha_0=\pm 90^\circ\text{，即 }\alpha_0=\pm 45^\circ$$

其中，45°方向对应于主应力 $\sigma_2=-30\text{MPa}$，-45°方向对应于主应力 $\sigma_1=0$。

评注：在平面应力状态时，主应力通常是指面内的主应力 σ_1、σ_2，而不包括垂直于该面的零主应力。

【例 3】 受力体某点两平面上的应力状态如图 7-6 所示，求其主应力大小。（东北大学，2001 年）

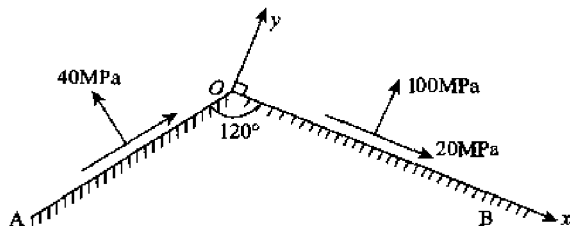


图 7-6

解 建立如图 7-6 所示的 xoy 坐标系，则有：

$$\begin{cases}\sigma_y=100\text{MPa}\\ \tau_{xy}=-20\text{MPa}\end{cases}$$

画 OA 和 x 轴成 $-30°$ 角，由斜截面上的正应力公式，

$$\sigma_{-30^\circ}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot[\cos(-30^\circ\times 2)]-\tau_{xy}\cdot[\sin(-30^\circ\times 2)]=40$$

即 $\dfrac{\sigma_x+100}{2}+\dfrac{\sigma_x-100}{2}\cdot[\cos(-60^\circ)]+20\cdot[\sin(-60^\circ)]=40$

解出 $\sigma_x=32.32\text{MPa}$

由主应力公式

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=105\text{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)+\tau_{xy}^2}=27\text{MPa}$$

评注：利用一已知斜截面上的正应力分量获得平面应力状态的三个应力分量，只要能熟记斜截面上的应力公式，本题便十分简单。

【例 4】 试求如图 7-7 所示纯剪切应力状态旋转 45°后各面上的应力分量，并将其标于图

7-8 中。并分别利用两种关系：(1)图 7-7 纯剪切应力状态和图 7-8 旋转 45°后的应力状态应变比能相等；(2)图 7-7 中 45°对角线方向上的应变和图 7-8 情形下 x' 方向上的应变相等，证明：$G=E/2(1+\mu)$。(华中科技大学，2003 年)

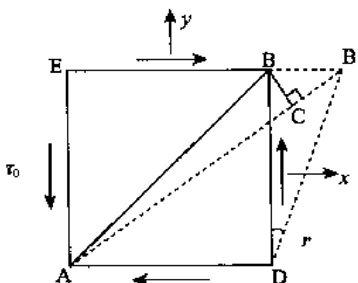


图 7-7

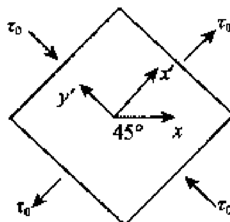


图 7-8

解 分析图 7-7 所示应力状态，$\sigma_x=\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=-\tau_0$，应力圆如图 7-9 所示，

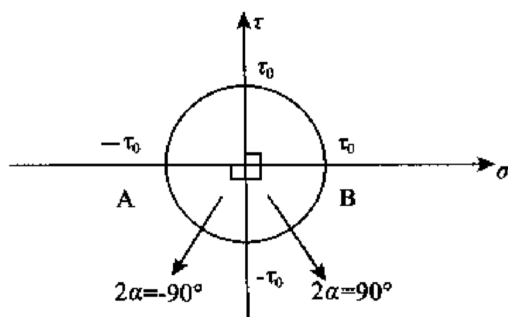


图 7-9

其中 A 点代表顺时针旋转 45°方向的应力状态，即图 7-8 中 y'方向的应力状态；B 点代表逆时针旋转 45°方向的应力状态，即图 7-8 中 x'方向的应力状态。

那么，旋转 45°后各面上的应力分量如图 7-8 所示，

(1)对于图 7-7 纯剪应力状态，其应变比能是，

$$U=\frac{1}{2}\tau_0\cdot\frac{\tau_0}{G}=\frac{\tau_0^2}{2G} \qquad ①$$

对于图 7-8 所示应力状态，三个主应力分别是，

$$\begin{cases}\sigma_1=\tau_0\\ \sigma_2=-\tau_0\end{cases}$$

据广义胡克定律，

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_1-\mu\cdot\sigma_2)=\dfrac{1+\mu}{E}\cdot\tau_0\\ \varepsilon_2=\dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_2-\mu\cdot\sigma_1)=-\dfrac{1+\mu}{E}\cdot\tau_0\end{cases}$$

则其应变比能是，

$$U=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i=\frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2=\frac{1+\mu}{E}\cdot\tau_0^2 \qquad ②$$

比较①②两式，$G=E/2(1+\mu)$

(2)在图 7-7 中，对角线 AB 经变形后变成了 AB′，伸长量是

$$|AB'|-|AB|\approx|B'C|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot|BB'|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r\cdot|BD|$$

而 $r=\frac{\tau_0}{G}$，所以伸长量是，

$$|AB'|-|AB|\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\tau_0}{G}\cdot|BD|$$

则 45°方向线应变是，

$$\varepsilon_{45^\circ}=\frac{|AB'|-|AB|}{|AB|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\tau_0}{G}\cdot|BD|}{\sqrt{2}\cdot|BD|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau_0}{G} \qquad ③$$

在图 7-8 中，由(1)问知道 45°方向的线应变是，

$$\varepsilon_{45^\circ}=\varepsilon_1=\frac{1+\mu}{E}\cdot\tau_0 \qquad ④$$

比较③和④有 $G=E/2(1+\mu)$

评注：对于纯弹性材料，只有两个独立的弹性常数。

【例 5】 已知构件表面一点为平面应力状态，若用电阻法测定该点的主应力，并采用 45°应变，如图 7-10 所示。已知三个方向的应变为 ε_a、ε_b、ε_c，弹性模量和泊松比分别为 E、μ，请导出两个非零主应力式。如果 $\varepsilon_a=51.6\times10^{-6}$，$\varepsilon_b=169\times10^{-6}$，$\varepsilon_c=-117\times10^{-6}$，$E=110GPa$，$\nu=0.25$，请确定该点的主应力大小和主方向。(武汉大学，2002 年)

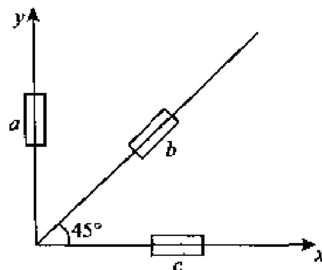


图 7-10

解 由题图：$\varepsilon_x=\varepsilon_c$，$\varepsilon_y=\varepsilon_a$

设剪应变是 γ_{xy}，则根据斜截面的线应变公式，有：

$$\varepsilon_b=\varepsilon_{45^\circ}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cdot[\cos(2\times45^\circ)]+\frac{\gamma_{xy}}{2}\cdot[\sin(2\times45^\circ)]$$

解出 $\gamma_{xy}=2\varepsilon_b-(\varepsilon_a+\varepsilon_c)$

由主应变计算公式，

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}=\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2+\left(\varepsilon_b-\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}=\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2+\left(\varepsilon_b-\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}$$

由广义胡克定律

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)$$

$$= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. \mu \cdot \left(\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} + \frac{E}{1+\mu} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1)$$

$$= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. \mu \cdot \left(\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{E}{1-\mu} \cdot \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} - \frac{E}{1+\mu} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}\right)^2}$$

即为平面应力状态的主应力公式。

若 $\varepsilon_a = 51.6 \times 10^{-6}$，$\varepsilon_b = 169 \times 10^{-6}$，$\varepsilon_c = -117 \times 10^{-6}$，$E = 110\text{GPa}$，$\mu = 0.25$，那么，

$$\sigma_1 = \frac{110 \times 10^3}{1-0.25} \times \frac{51.6 \times 10^{-6} - 117 \times 10^{-6}}{2} + \frac{110 \times 10^3}{1+0.25} \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{51.6 \times 10^6 + 117 \times 10^{-6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{169 \times 10^6 - 51.6 \times 10^6 - 117 \times 10^{-6}}{2}\right)^2}$$

$$= 14.4(\text{MPa})$$

$$\sigma_2 = \frac{110 \times 10^3}{1-0.25} \times \frac{51.6 \times 10^{-6} - 117 \times 10^{-6}}{2} - \frac{110 \times 10^3}{1+0.25} \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{51.6 \times 10^6 + 117 \times 10^{-6}}{2}\right)^2 \left(\frac{169 \times 10^{-6} - 51.6 \times 10^6 - 117 \times 10^{-6}}{2}\right)^2}$$

$$= -24.1\text{MPa}$$

由主方向公式，

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{\varepsilon_c - \varepsilon_a} = \frac{2 \times 169 \times 10^{-6} - (51.6 \times 10^{-6} - 117 \times 10^{-6})}{-117 \times 10^{-6} - 51.6 \times 10^{-6}} = -2.4$$

$2\alpha_0 = -67.2°$或 $112.8°$，即 $\alpha_0 = -33.6°$或 $56.4°$

其中 $\alpha_0 = -33.6°$对应于主应力 σ_3，$\alpha_0 = 56.4°$对应于主应力 σ_1。

评注：剪应变 γ_{xy}是正值，由应力圆中的几何关系，和 x 方向成$-33.6°$的方向必然是主应力 ε_3 所在方向。

【例 6】 某塑性材料构件内，存在三点处于平面应力状态，其单元体分别如图 7-11 中的 a，b，c 所示，($\sigma > 0$)

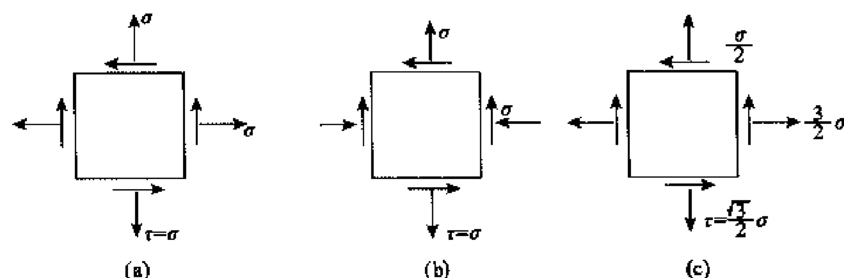


图 7-11

(1)试分别求其主应力,并说明属于何种简单的应力状态?

(2)若按照最大剪应力强度理论,则哪一点最易屈服?(浙江大学,2000 年)

解 (1)对于图 7-11(a),由主应力计算公式

$$\begin{cases}\sigma_1 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \dfrac{\sigma+\sigma}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\sigma-\sigma}{2}\right)^2+\sigma^2} = 2\sigma \\ \sigma_2 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \dfrac{\sigma+\sigma}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\sigma-\sigma}{2}\right)^2+\sigma^2} = 0\end{cases}$$

处于单向应力状态($\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$);

对于图 7-11(b),由主应力计算公式

$$\begin{cases}\sigma_1 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \dfrac{-\sigma+\sigma}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{-\sigma-\sigma}{2}\right)^2+\sigma^2} = \sqrt{2}\sigma \\ \sigma_2 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \dfrac{-\sigma+\sigma}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{-\sigma-\sigma}{2}\right)^2+\sigma^2} = -\sqrt{2}\sigma\end{cases}$$

处于纯剪应力状态($\sigma_1 = \sqrt{2}\sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sqrt{2}\sigma$);

对于图 7-11(c),由主应力计算公式

$$\begin{cases}\sigma_1 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \dfrac{\frac{3}{2}\sigma+\frac{1}{2}\sigma}{2}+\sqrt{\left[\dfrac{\frac{3}{2}\sigma-\frac{1}{2}\sigma}{2}\right]^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sigma\right)^2} = 26 \\ \sigma_2 = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} = \dfrac{\frac{3}{2}\sigma+\frac{1}{2}\sigma}{2}-\sqrt{\left[\dfrac{\frac{3}{2}\sigma-\frac{1}{2}\sigma}{2}\right]^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sigma\right)^2} = 0\end{cases}$$

处于单向应力状态($\sigma_1=2\sigma,\sigma_2=\sigma_3=0$)。

(2)对于图 7-11(a),最大剪应力是 $\tau_{max} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = \sigma$

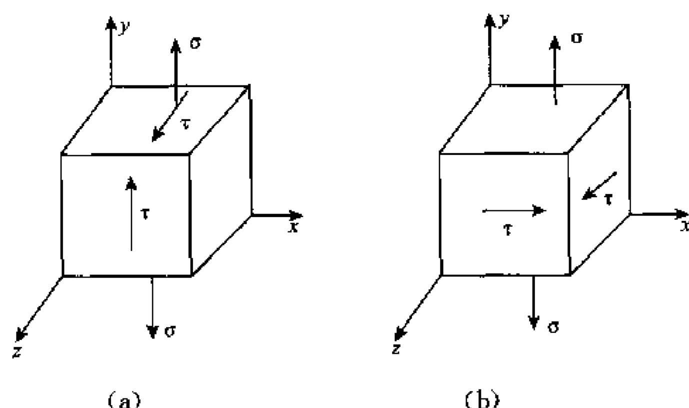
对于图 7-11(b),最大剪应力是 $\tau_{max} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = \sqrt{2}\sigma$

对于图 7-11(c),最大剪应力是 $\tau_{max} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) = \sigma$

由最大剪应力强度理论,图 7-11(b)对应点最易屈服。

评注:塑性材料的破坏方式是塑性流动,最大剪应力强度理论是适用的。

【例 7】 如图 7-12 所示两受力微体,其中 $\sigma = 2|\tau|$,并设为 σ 已知,



(a) (b)

图 7-12

(1)求各微体主应力 σ_1,σ_2 和 σ_3 之值;

(2)设两微体材料相同,根据第三强度理论判断哪种应力状态较危险?(北京航空航天大学,2001 年)

解 (1)对于图 7-12(a)所示单元体,在平面 yoz 上,由主应力计算公式,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\sigma + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\sigma$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\sigma + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}\sigma$$

比较各主应力大小,有 $\sigma_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}\sigma$

对于图 7-12(b)所示单元体,在平面上,由主应力计算公式,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{0+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + \tau^2} = |\tau| = \frac{\sigma}{2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{0+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + \tau^2} = -|\tau| = -\frac{\sigma}{2} \end{cases}$$

比较各主应力大小,有 $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$, $\sigma_3 = -\frac{\sigma}{2}$

(2)对于图 7-12(a)所示应力状态,由第三强度理论:$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{2}\sigma$

对于图 7-12(b)所示应力状态,由第三强度理论:$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{2}\sigma$

显然,图 7-12(b)所示应力状态较危险。

评注:第三强度理论也就是最大剪应力强度理论($\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$)。

【例 8】 薄壁圆筒扭转—拉伸的示意图如图 7-13 所示。若 $P=20\text{kN}$,$T=600\text{N}\cdot\text{m}$ 且内径 $d=50\text{mm}$,厚度 $\delta=2\text{mm}$,试求

(1)A 点在指定斜截面上的应力。

(2)A 点的主应力的大小和方向(用单元体表示)(华东理工大学,2001 年)

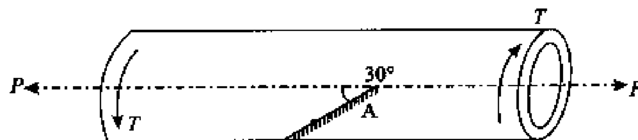


图 7-13

解 (1)A 点的轴向正应力是：$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{20 \times 10^3}{3.14 \times 50 \times 2} = 63.7(\text{MPa})$(其中 $A = \pi d\delta$)

A 点的环向剪应力是：

$$\tau = \frac{T}{2A_0\delta} = \frac{600}{2 \times 3.14 \times \left(\frac{50+2}{2}\right)^2 \times 2 \times 10^{-3}} = 70.7(\text{MPa})\ (\text{其中 } A_0 = \frac{1}{4}\pi d^2)$$

题图所示斜截面与轴向成 $\alpha = -60°$ 角,则根据斜截面上的应力方式,

$$\begin{aligned}\sigma_{-60°} &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha \\ &= \frac{63.7+0}{2} + \frac{63.7-0}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - (-70.7) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -45.3(\text{MPa})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{-60°} &= \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = \frac{63.7-0}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-70.7) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 7.8\text{MPa}\end{aligned}$$

由主应力计算公式,

$$\begin{cases}\sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{63.7+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{63.7-0}{2}\right)^2 + (70.7)^2} = 109.4\text{MPa} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{63.7+0}{2} - \sqrt{\left(\frac{63.7-0}{2}\right)^2 + (70.7)^2} = -45.7\text{MPa}\end{cases}$$

比较各主应力大小知道,$\sigma_1 = 109.4\text{MPa}$,$\sigma_2 = 0\text{MPa}$,$\sigma_3 = -45.7\text{MPa}$。

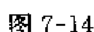
由主方向公式：$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \times (-70.7)}{63.7 - 0} = 2.22$

所以 $2\alpha_0 = 65.7°$ 或 $245.7°$,即 $\alpha_0 = 32.9°$ 或 $122.9°$

其中,$\alpha_0 = 32.9°$ 对应于主应力 σ_1,$\alpha_0 = 122.9°$ 对应于主应力 σ_3。

评注:掌握好相关知识点,本题便十分简单。读者要注意剪应力正负号的规定。

【例 9】 试求如图 7-14 所示应力状态的主应力,画出主应力单元体(边长为 l),则其对角线长度的改变量 Δl 及 30°角的改变量分别是多少?(已知材料弹性模量 E=200GPa,泊松比 μ=0.3)(大连理工大学,2002 年)


图 7-14

解 由主应力计算公式

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40 + 40}{2}\sqrt{\left(\frac{40 - 40}{2}\right)^2 + 10^2}$$

$$= 40 + 10 = 50(\text{MPa})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40 + 40}{2} - \sqrt{\left(\frac{40 - 40}{2}\right)^2 + 10^2}$$

$$= 40 - 10 = 30(\text{MPa})$$

由主方向计算公式

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \times (-10)}{40 - 40} = \pm \infty \Rightarrow 2\alpha_0 = \pm 90^\circ$$

即 $\alpha_0 = \pm 45^\circ$

其中，$\alpha_0 = 45^\circ$方向代表主应力 σ_1 所在方向，$\alpha_0 = -45^\circ$代表主应力 σ_3 所在方向。主应力单元体如图 7-15 所示。


图 7-15

由广义胡克定律：

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = \frac{1}{200 \times 10^9} \times (50 \times 10^6 - 0.3 \times 30 \times 10^6) = 2.05 \times 10^{-4}$$

那么，对角线长度改变量是：

$$\Delta l = \sqrt{2} l \times \varepsilon_{45^\circ} = \sqrt{2} \times 2.05 \times 10^{-4} l = 3.4 \times 10^{-3} l$$

对单元体的剪切变形分析如图 7-16，

图 7-16

在剪应力 τ_{xy} 作用下的剪应变是：

$$\gamma = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)\tau_{xy}}{E} = \frac{2\times(1+0.3)\times(-10)\times10^6}{200\times10^9}$$

$= -0.13\times10^{-3}$（负号表示直角增大）

则在图 7-16 中，

$\angle CBE = |\gamma| = 0.13\times10^{-3}$

$|HG| = \angle CBE\cdot|BH| = 0.13\times10^{-3}\cdot|BH|$

$|LG| = |HG|\cdot\sin15^\circ = 0.13\times10^{-3}\cdot|BH|\cdot\sin15^\circ$

$$\angle HAG = \frac{|LG|}{|AH|} = \frac{0.13\times10^{-3}\cdot|BH|\cdot\sin15^\circ}{\frac{|BH|}{\sin15^\circ}} = 0.13\times10^{-3}\cdot\sin^2 15^\circ$$

$|CE| = \angle CBE\cdot|BC| = 0.13\times10^{-3}\cdot|BC|$

$|CF| = |CE|\cdot\cos45^\circ = 0.13\times10^{-3}\cdot|BC|\cdot\cos45^\circ$

$$\angle CAE = \frac{|CF|}{|AC|} = \frac{0.13\times10^{-3}\cdot|BC|\cdot\cos45^\circ}{\frac{|BC|}{\cos45^\circ}} = 0.13\times10^{-3}\cdot\cos^2 45^\circ$$

那么 30°角（$\angle CAH$）的改变量是：

$\angle CAE - \angle HAG = 0.13\times10^{-3}(\cos^2 45^\circ - \sin15^\circ) = 0.56\times10^{-4}$（角度减小）

评注：本题中由于两方向正应力相等，对角度的改变没有贡献。读者还要注意剪应变的正负号规定，直角减小为正、增大为负。

【例 10】 如图 7-17 所示一边长为 a 的正方体，仅沿 x 方向受力（$\sigma_x\neq0$）。设材料为均质各向同性，试证：在线弹性范围内，当 σ_x 为拉应力时，立方体体积将增大，当 σ_x 为压应力时，立方体体积将缩小。（大连理工大学，2002 年）

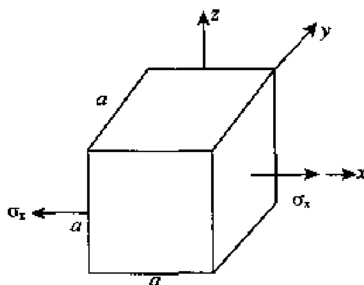


图 7-17

证明：由广义胡克定律

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_x - \mu(\sigma_y+\sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E}\\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_y - \mu(\sigma_x+\sigma_z)] = -\mu\cdot\frac{\sigma_x}{E}\\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\cdot[\sigma_z - \mu(\sigma_x+\sigma_y)] = -\mu\cdot\frac{\sigma_x}{E}\end{cases}$$

那么对于题图所示边长为 a 的正立方体，变形后各边长分别是，

$$\begin{cases} x\text{ 方向}, l_x=a(1+\varepsilon_x) \\ y\text{ 方向}, l_y=a(1+\varepsilon_y) \\ z\text{ 方向}, l_z=a(1+\varepsilon_z) \end{cases}$$

略去高阶小量，则变形后的体积是：

$$V' = l_x \cdot l_y \cdot l_z = a^3(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) = a^3(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$$

体积应变是：

$$\varepsilon_V = \frac{V'-V}{V} = \frac{a^3(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)-a^3}{a^3} = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{1-2V}{E}\cdot\sigma_x$$

$$\begin{cases} \text{当 } \sigma_x \text{ 为拉应力，即 } \sigma_x>0\text{，时 } \varepsilon_V=\dfrac{V'-V}{V}>0\text{，正方体体积增大；} \\ \text{当 } \sigma_x \text{ 为压应力，即 } \sigma_x<0\text{，时 } \varepsilon_V=\dfrac{V'-V}{V}<0\text{，正方体体积减小；} \end{cases}$$

评注：读者要掌握体积应力、体积应变以及体积模量的定义。其中，体积应力是 $\sigma_V = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$，体积应变是 $\varepsilon_V = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$，体积模量是 $K = E/3(1-2V)$。

【例 11】 用直角应变花测得受力构件表面 O 点处的应变值 $\varepsilon_{0^\circ}, \varepsilon_{45^\circ}, \varepsilon_{90^\circ}$；如图 7-18 所示。构件弹性模量为 E，泊松比是 μ。试推导 O 点处的应力 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 的公式。（复旦大学，1999 年）

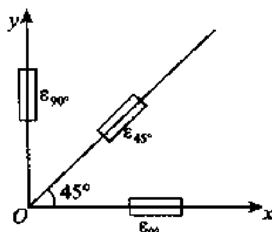


图 7-18

解 由题图：$\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ}, \varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ}$

而由斜截面的线应变公式，

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cdot[(2\times45^\circ)] - \frac{\gamma_{xy}}{2}\cdot[\sin(2\times45^\circ)]$$

$$= \frac{\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ}}{2} + \frac{\varepsilon_{0^\circ}-\varepsilon_{90^\circ}}{2}\cdot\cos90^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2}\cdot\sin90^\circ$$

$$= \frac{\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ}}{2} - \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

从上式中解出 $r_{xy} = (\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ}) - 2\varepsilon_{45^\circ}$

由广义胡克定律得到：

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_x+V\varepsilon_y) = \dfrac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_{0^\circ}+\mu\,\varepsilon_{90^\circ}) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_y+V\varepsilon_x) = \dfrac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_{90^\circ}+\mu\,\varepsilon_{0^\circ}) \\ \tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\cdot[2\varepsilon_{45^\circ}-(\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ})] \end{cases}$$

评注：采用直角应变花测量一点应力状态的实验方法，读者要掌握好。

【例 12】 如图 7-19 所示单元体，已知 x 方向的正应力 σ 和材料弹性常数 E，μ。试证明与 x 方向成 α 角度上的应变是 $\varepsilon_\alpha=\varepsilon(\cos_\alpha^2-\mu\sin_\alpha^2)$。（南京航空航天大学，2000 年）

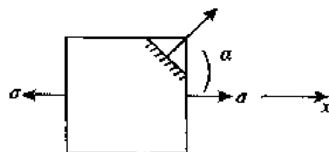


图 7-19

解 利用广义胡克定律

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_x-\mu\sigma_y)=\dfrac{\sigma}{E}=\varepsilon\\[2mm]\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}\cdot(\sigma_y-\mu\sigma_x)=-\mu\cdot\dfrac{\sigma}{E}=-\mu\varepsilon\\[2mm]\gamma_{xy}=\dfrac{\tau_{xy}}{G}=0\end{cases}$$

由斜截面上的线应变公式，有：

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cdot\cos2\alpha-\frac{\gamma_{xy}}{2}\cdot\sin2\alpha$$

$$=\frac{\varepsilon-\nu\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon+\mu\varepsilon}{2}\cos2\alpha$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}(1+\cos2\alpha-\mu+\mu\cos2\alpha)$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}(2\cos^2\alpha-\mu\cdot2\sin^2\alpha)$$

$$=\varepsilon(\cos^2\alpha-\mu\sin^2\alpha)$$

评注：本题是一道基本概念题，掌握斜截面上的线应变公式便可。

【例 13】 一个薄的矩形钢板承受均布应力 σ_x 和 σ_y 作用，如图 7-20 所示。在 x 和 y 方向分别有应变片 A 和 B 贴在板上，应变片读数给出正应变 $\varepsilon_x=480\times10^{-6}$ 和 $\varepsilon_y=130\times10^{-6}$，设 E $=200\text{GPa}$，$\mu=0.30$，求应力 σ_x 和 σ_y。（北京大学，2000 年）

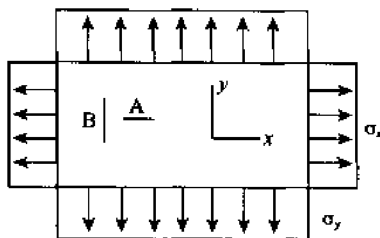


图 7-20

解 由广义胡克定律得到：

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)=\frac{200\times10^3}{1-(0.30)^2}\cdot(480\cdot10^{-6}+0.30\times130\times10^{-6})=114(\text{MPa})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x) = \frac{200\times10^3}{1-(0.30)^2}\cdot(130\times10^{-6}+0.30\times480\times10^{-6}) = 60(\text{MPa})$$

评注：读者不仅要记住广义胡克定律的公式，还应记住其逆关系的公式，即：

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\ 、\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)$$

【例 14】 如图 7-21 所示圆杆，$d=200\text{mm}$，$P=200\pi\text{kN}$，$E=200\times10^3\text{MPa}$，$\mu=0.3$，$[\sigma]=170\text{MPa}$，扭矩 m 为未知，在杆表面上 K 点处 $\varepsilon_{45^\circ}=-3\times10^{-4}$，请用第四强度理论校核该点强度。（武汉大学，2001 年）

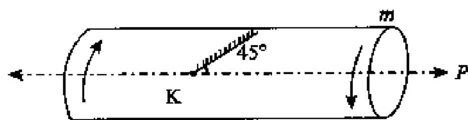


图 7-21

解 K 点处由于轴向拉力 P 所形成的正应力是，

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{200\pi\times10^3}{\frac{1}{4}\times\pi\times(200\times10^{-3})^2} = 20\times10^6(Pa) = 20\text{MPa}$$

由于扭矩 m 所形成的剪应力是：$\tau = \frac{m}{W_P} = \frac{m}{\frac{1}{16}\pi d^3}$

在 K 点取单元体进行分析如图 7-22 所示，

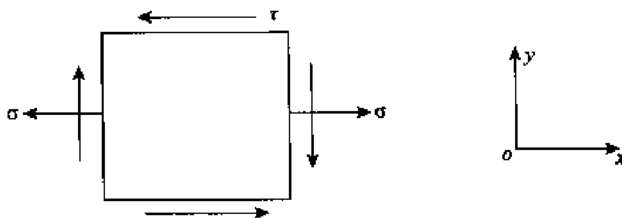


图 7-22

由广义胡克定律，

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_x-\mu\sigma_y) = \frac{\sigma}{E} = \frac{20}{200\times10^3} = 10^{-4}\\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_y-\mu\sigma_x) = -\mu\cdot\frac{\sigma}{E} = -0.3\times\frac{20}{200\times10^3} = -0.3\times10^{-4}\\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)\cdot\tau}{E} = \frac{2\times(1+0.3)\cdot\tau}{200\times10^3\times10^6} = \frac{2.6\tau}{2.0\times10^{11}} = 1.3\tau\times10^{-11}\end{cases}$$

由斜截面上的线应变公式，

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cdot[\cos(2\times45^\circ)]-\frac{r_{xy}}{2}\cdot[\sin(2\times45^\circ)]$$

$$= \frac{10^{-4}-0.3\times10^{-4}}{2}+\frac{10^{-4}+0.3\times10^{-4}}{2}\cdot\cos90^\circ-\frac{1.3\tau\times10^{-11}}{2}\cdot\sin90^\circ = -3\times10^{-4}$$

解出 $\tau = 51.5\times10^6(\text{Pa}) = 51.5(\text{MPa})$

由第四强度理论，

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{20^2+3\times(51.5)^2}=91.4(\text{MPa})<[\sigma]=170\text{MPa}$$

所以该点是安全的。

评注：第四强度理论即形状改变比能理论，公式为

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma]$$

【例 15】 如图 7-23 所示同一材料的两个单元体。材料的屈服极限 $\sigma_s=275\text{MPa}$。试根据第三强度理论求两个单元体同时进入屈服极限时拉应力 σ 与剪应力 τ 的值。（设 $\sigma>\tau$）（河海大学，2000 年）

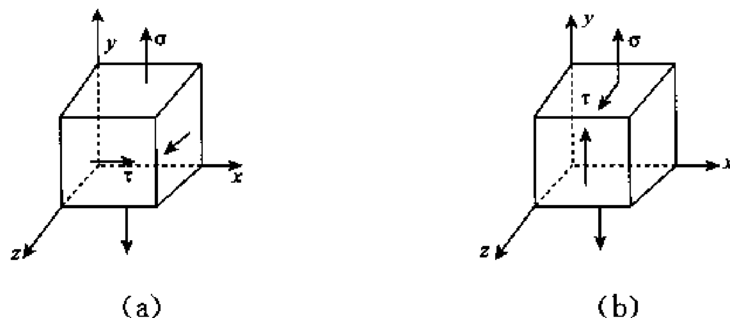


图 7-23

解 对图 7-23(a)所示单元体，在 xoz 平面上：

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}=\frac{0+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\tau$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{xz}^2}=\frac{0+0}{2}-\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+\tau^2}=-\tau$$

比较各主应力大小知道 $\sigma_1=\sigma,\sigma_2=\tau,\sigma_3=-\tau$

由第三强度理论，

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sigma+\tau$$

同理，对于图 7-23(b)所示单元体，在 yoz 平面内

$$\sigma_1=\frac{\sigma_y+\sigma_z}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{yz}^2}=\frac{\sigma+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_y+\sigma_z}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{yz}^2}=\frac{\sigma+0}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$$

比较各主应力大小知道：

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2},\sigma_2=0,\sigma_3=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$$

由第三强度理论：$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$

若两单元体同时进入屈服极限有，

$$\begin{cases}\sigma+\tau=\sigma_s=275\text{MPa} & ①\\ \sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sigma_s=275\text{MPa} & ②\end{cases}$$

解出 $\sigma=165(\text{MPa}),\tau=110(\text{MPa})$

评注:本题虽然是一道考察主应力计算公式和第三强度理论的基本概念题,但题型还是比较新颖的。

【例 16】 试求如图 7-24 所示单元体的形状改变比能 u 和单元体第三强度理论的相当应力 σ_{r3},已知弹性模量 E=200GPa,泊松比 $\mu=0.3$。(大连理工大学,2000 年)

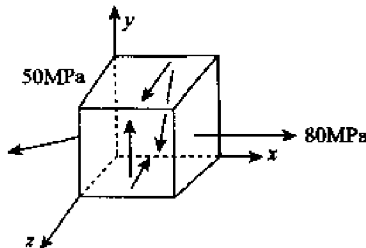


图 7-24

解 在平面 yoz 上,由主应力计算公式

$$\sigma_1=\frac{\sigma_y+\sigma_z}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{yz}^2}=\frac{0+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+50^2}=50\text{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_y+\sigma_z}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2}\right)^2+\tau_{yz}^2}=\frac{0+0}{2}-\sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2+50^2}=-50\text{MPa}$$

比较各主应力大小知道 $\sigma_1=80\text{MPa}$,$\sigma_2=50\text{MPa}$,$\sigma_3=50\text{MPa}$。

由形状改变比能公式,

$$u=\frac{1+\mu}{6\text{E}}\cdot[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

$$=\frac{1+0.3}{6\times200\times10^9}\cdot[(80-50)^2+(50+50)^2+(-50-80)^2]$$

$$=30000=3.0\times10^4(\text{N}\cdot\text{m/m}^3)$$

由第三强度理论:$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=80+50=130(\text{MPa})$

评注:通过本题,读者应该掌握以下几个重要概念和公式:

(1)变形比能:

$$U=\frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2+\frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3=\frac{1}{2\text{E}}\cdot[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)];$$

(2)形状改变比能:$U_f=\dfrac{1+\mu}{6\text{E}}\cdot[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$;

(3)体积改变比能:$U_V=\dfrac{1-2\mu}{6\text{E}}\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$;

(4)各比能之间的关系是,$U=U_f+U_V$;

(5)最大形状改变强度理论(第四强度理论)认为材料的破坏原因是由于最大形状改变比能的作用,即 $\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma]$。

【例 17】 如图 7-25 所示,有一两端受扭矩 T 和拉力 P 作用的圆柱形薄壁压力容器。已知容器的筒壁半径是 $r=40$mm,壁厚是 $t=2$mm,筒体长度 $l=1$m,弹性模量 E=200GPa,泊松比 $\mu=0.25$。内部压力 $p=10$MPa,扭矩 $T=640\pi$N·m。筒壁内的许用拉应力为 200MPa,根据第三强度理论,试求拉力 P 的最大容许值应为多少?并计算此时筒体的轴向伸长 Δl 和圆筒半径

r 的改变 Δr。(北京大学,2001 年)

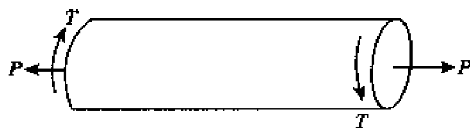


图 7-25

解 圆筒在内压 p 的作用下沿轴向的拉应力是,

$$\sigma_1 = \frac{pD}{4t} = \frac{10\times10^6\times80\times10^{-3}}{4\times2\times10^{-3}} = 100\times10^6(\text{Pa}) = 100(\text{MPa})$$

圆筒在内压 p 作用下沿环向的拉应力是:$\sigma_2 = \frac{pD}{2t} = 2\times100 = 200(\text{MPa})$

圆筒在轴向拉力 P 作用下的拉应力是,

$$\sigma_3 = \frac{P}{\text{A}} = \frac{P}{\pi\times80\times10^{-3}\times2\times10^{-3}} = P\cdot2.0\times10^3(\text{Pa}) = 2.0\times10^{-3}\cdot P(\text{MPa})$$

圆筒在扭矩 T 的作用下的剪应力是,

$$\tau = \frac{T}{2\text{A}_0t} = \frac{640\pi}{2\pi\times(40+1)^2\times10^{-6}\times2\times10^{-3}} = 95.2\times10^6(\text{Pa}) = 95.2(\text{MPa})$$

在圆筒上取单元体如图 7-26 所示,

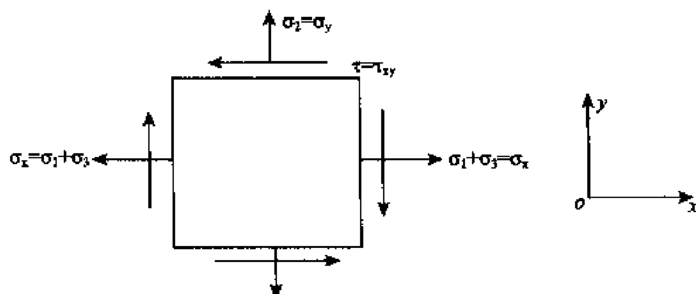


图 7-26

由主应力计算公式,

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= (150+1.0\times10^{-3}\cdot P) + \sqrt{(1.0\times10^{-3}\cdot P-50)^2+95.2^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= (150+1.0\times10^{-3}P) - \sqrt{(1.0\times10^{-3}\cdot \text{P}-50)^2+95.2^2}$$

假定圆筒径向内压 P 对应于最小主应力,即 $\sigma_3 = -\text{P}$,那么,

由第三强度理论

$$\sigma_1-\sigma_3 = (150+1.0\times10^3\cdot P) + \sqrt{(1.0\times10^{-3}\cdot P-50)^2+95.2^2}+10 = [\sigma] = 200$$

解出 P=558(kN)

此时,σ_1=1225(MPa),σ_2=191(MPa),σ_3=−10(MPa),原假定成立。

由于径向应力 σ_3 较小,这里忽略其效应。

由广义胡克定律,

轴向应变是 $\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu\sigma_y) = 5.8 \times 10^{-3}$

环向应变是 $\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu\sigma_z) = -0.52 \times 10^{-3}$

所以，筒体轴向伸长是 $\Delta l = l \cdot \varepsilon_x = 1 \times 5.8 \times 10^{-3} = 5.8\text{mm}$；

筒体半径的改变量是 $\Delta r = r \cdot \varepsilon_y = 40 \times (-0.52 \times 10^{-3}) = -0.02\text{mm}$。

评注：读者应记住压力容器中的轴向应力的环向应力公式，即 $\sigma = \frac{PD}{4t}$ 和 $\sigma = \frac{PD}{2t}$。

【例 18】 如图 7-27 所示薄壁容器外径 D_1，内径 D，壁厚 δ，内压强 P。材料弹性常数 E 和 μ 已知，试确定：

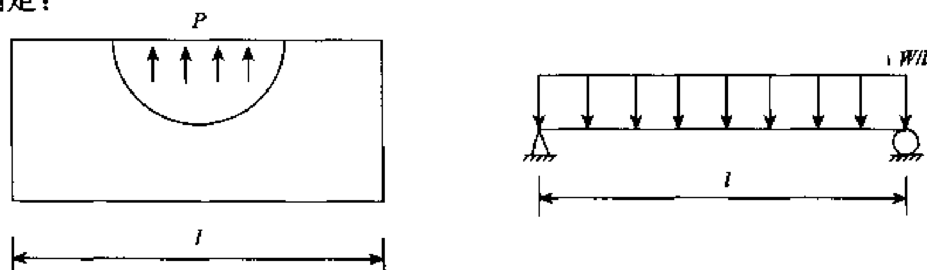


图 7-27

(1)考虑容器自重(可看做长度方向的均布体力)W 时，容器的危险截面和危险点的位置；

(2)用单元体表示危险点的应力并计算出主应力；

(3)计算危险点水平方向的线应变。(南京航空航天大学，2002 年)

解 (1)在自重作用下的梁最大弯矩是 $M_{max} = \frac{1}{8}\left(\frac{W}{l}\right)l^2 = \frac{1}{8}Wl$，且发生在跨中截面。容器的危险截面显然在跨中位置。

在跨中位置，容器由于自重引起的截面正应力是，

$$\sigma_1 = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{\frac{1}{8}Wl}{\frac{\pi D_1^3}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{D}{D_1}\right)^4\right]} = \frac{4Wl}{\pi D_1^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{D}{D_1}\right)^4\right]}$$

在跨中位置，容器由于内压形成的轴向正应力是：$\sigma_2 = \frac{pD}{4\delta}$

在跨中位置，容器由于内压形成的环向正应力是：$\sigma_3 = \frac{pD}{2\delta}$

跨中位置，截面下边缘在各项载荷作用下的应力均为拉应力，所以是危险点所在位置。

(2)在该处取单元体进行分析如图 7-28 所示，

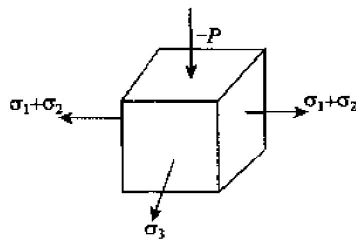


图 7-28

比较各主应力大小，$\sigma_1=\frac{PD}{2\delta}$，$\sigma_2=\frac{4W}{\pi D_1^3[1-(D/D_1)^4]}+\frac{PD}{4\delta}$，$\sigma_3=-P$。

(3)在危险点，由广义胡克定律知道其水平方向线应变是，

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\cdot[\sigma_2-\mu(\sigma_1+\sigma_3)]=\frac{1}{E}\cdot\left[\frac{4W}{\pi D_1^3[1-(D/D_1)^4]}+\frac{PD}{4\delta}-\mu\left(\frac{PD}{2\delta}-p\right)\right]$$

评注：在纯弹性范围内，应用叠加法计算各项荷载作用下总的应力即可。

【例 19】 如图 7-29 所示圆杆直径 $d=10\text{mm}$，$P=2\text{kN}$，$M=\frac{1}{10}Pd$，杆材料为铸铁，$[\sigma_C]=40\text{MPa}$，$[\sigma_t]=120\text{MPa}$，$E=100\text{GPa}$，$\mu=0.25$。

(1)求圆杆表面 C 点沿 AB 方向线应变；

(2)按第二强度理论校核该杆的强度。(中南大学，2000 年)

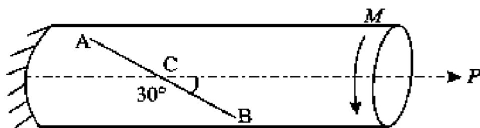


图 7-29

解 (1)C 点由于轴向拉力 P 而产生的拉应力是，

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{P}{\frac{1}{4}\pi d^2}=\frac{4P}{\pi d^2}=\frac{4\times2\times10^3}{\pi\times(10\times10^{-3})^2}=25.5\times10^6(\text{Pa})=25.5(\text{MPa})$$

C 点由于扭矩 M 而产生的剪应力是，

$$\tau=\frac{M}{W_P}=\frac{M}{\frac{1}{16}\pi d^3}=\frac{\frac{1}{10}\times2\times10^3\times10\times10^{-3}}{\frac{1}{16}\times\pi\times(10\times10^{-3})^3}=10.2\times10^6(Pa)=10.2(\text{MPa})$$

在 C 点取单元体进行分析如图 7-30 所示，

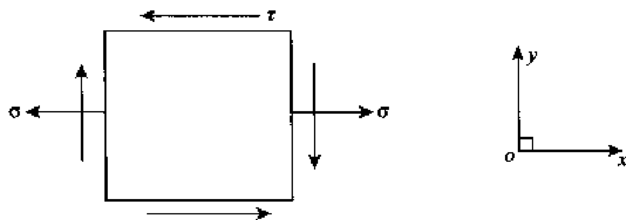


图 7-30

由广义胡克定律，

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)=\frac{\sigma}{E}=\frac{25.5}{100}=0.255$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)=-\mu\cdot\frac{\sigma}{E}=-0.25\times0.255=-0.064$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau}{G}=\frac{2(1+\mu)\cdot\tau}{E}=\frac{2.5\times10.2}{100}=0.255$$

由斜截面上的线应变公式，

$$\varepsilon_{-30^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos[2 \times (-30^\circ)] - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin[2 \times (-30^\circ)]$$

$$= \frac{0.255 - 0.064}{2} + \frac{0.255 + 0.064}{2} \cdot \cos(-60^\circ) - \frac{0.255}{2} \cdot \sin(-60^\circ) = 28.6 \times 10^{-5}$$

(2)由主应力计算公式

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{25.5 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{25.5 - 0}{2}\right)^2 + 10.2^2} = 29(\text{MPa})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{25.5 + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{25.5 - 0}{2}\right)^2 + 10.2^2} = -3.6(\text{MPa})$$

比较各主应力大小知道，$\sigma_1 = 29\text{MPa}$，$\sigma_2 = 0\text{MPa}$，$\sigma_3 = -3.6\text{MPa}$。

由第二强度理论，

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 29 - 0.25 \times (0 - 3.6) = 29.99(\text{MPa}) < [\sigma_t] = 120\text{MPa}$$

该杆满足强度要求。

评注：第二强度理论即最大主应变强度理论，$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$。

【例 20】 某构件危险点应力状态如图 7-31 所示，材料的许用应力$[\sigma] = 170\text{MPa}$，试按第三强度理论校核构件强度。（哈尔滨工业大学，2000 年）

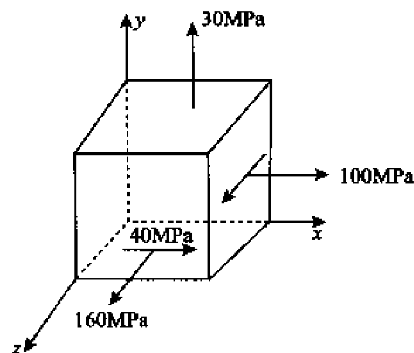


图 7-31

解 在平面 xoz 上，由主应力计算公式

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{100 + 160}{2} + \sqrt{\left(\frac{100 - 160}{2}\right)^2 + 40^2} = 180\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{100 + 160}{2} - \sqrt{\left(\frac{100 - 160}{2}\right)^2 + 40^2} = 80\text{MPa}$$

比较各主应力大小知道，$\sigma_1 = 180\text{MPa}$，$\sigma_2 = 80\text{MPa}$，$\sigma_3 = 30\text{MPa}$

由第三强度理论，

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 180 - 30 = 150(\text{MPa}) < [\sigma] = 170\text{MPa}$$

该构件强度满足要求。

评注：这是一道考查第三强度理论的基本概念题。

第三节　习　题

一、简答题

铅笔写字，笔尖折断，是什么应力导致的结果？为什么？（长安大学，2001 年）

二、填空题

1. 利用叠加法求杆件组合变形的条件是：________和________。

2. 单元体斜截面应力公式 $\sigma_a=(\sigma_x+\sigma_y)/2+(\sigma_x-\sigma_y)\cos2a/2-\tau_{xy}\sin2a$ 和 $\tau_a=(\sigma_x-\sigma_y)\sin2a/2+\tau_{xy}\cos2a$ 的适用范围是________。

3. 研究一点应力状态的任务是________。

4. 各向同性线弹性材料常数为 E，泊松比为 μ，材料内某点主应力是 $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，则此点第三主应变 ε_3 是________，最大切应变 ν_{max} 是________。（北京航空航天大学，2003 年）

5. 一受拉伸和弯曲的圆截面钢轴，若用第三强度理论设计的直径是 d_3，用第四强度理论设计的直径是 d_4，则 d_3 ________ d_4。（国防科技大学，2004 年）

6. 塑性材料和脆性材料中，________对应力集中更为敏感。（西安电子科技大学，2000 年）

7. 如图 7-32 所示单元体属于________应力状态。（填"单向"、"二向"、"三向"或"纯剪"）

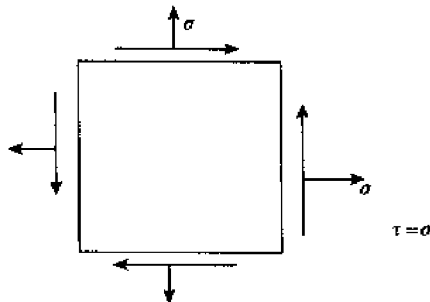


图 7-32

三、选择题

1. 钢材经过冷作硬化处理后，其________基本不变。

   A. 弹性模量　　B. 比例极限　　C. 延伸率　　D. 截面收缩率

2. 在单元体上，可以认为：________。

   A. 每个面上的应力是均匀分布的，一对平行面上的应力相等
   B. 每个面上的应力是均匀分布的，一对平行面上的应力不等
   C. 每个面上的应力是非均匀分布的，一对平行面上的应力相等
   D. 每个面上的应力是非均匀分布的，一对平行面上的应力不等

3. 受内压作用的封闭薄圆筒，在通过其内壁任意一点的纵、横面中________。

   A. 纵、横两截面都不是主平面　　B. 横截面是主平面，纵截面不是
   C. 纵、横两截面都是主平面　　D. 纵截面是主平面，横截面不是

4. 圆截面杆上受力如图 7-33 所示。材料为 A3 钢，许用正应力为 $[\sigma]$，许用剪应力为 $[\tau]$，横截面面积为 A，抗弯截面系数为 W，抗扭截面系数为 W_p。下列各强度条件中正确的是_______。

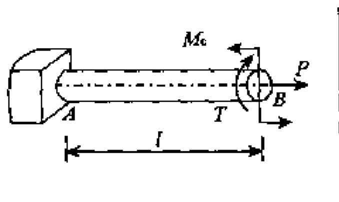


图 7-33

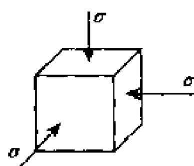
A. $\frac{P}{A}+\frac{M_c}{W}\leqslant[\sigma],\frac{T}{W_p}\leqslant[\tau]$　　B. $\frac{P}{A}+\sqrt{(\frac{M_c}{W})^2+4(\frac{T}{W_p})^2}\leqslant[\sigma]$

C. $\frac{M_c}{W}+\sqrt{(\frac{P}{A})^2+4(\frac{T}{W_p})^2}\leqslant[\sigma]$　　D. $\sqrt{(\frac{M_c}{W}+\frac{P}{A})^2+4(\frac{T}{W_p})^2}\leqslant[\sigma]$

5. 已知材料的弹性模量 E，泊松比 μ，单轴应力状态的最大切应变为_______。

A. $\frac{(1+\mu)\sigma}{E}$　　B. $\frac{(1+\mu)\sigma}{4E}$　　C. $\frac{E}{(1+\mu)\sigma}$　　D. $\frac{4E}{(1+\mu)\sigma}$

6. 对于如图 7-34 所示的三向应力状态，以下结论中错误的是_______。



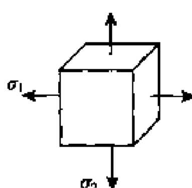


图 7-34　　图 7-35

A. 应力圆为一点圆

B. 任一斜截面均为主平面

C. 由第三、第四强度理论，这种应力状态不会破坏

D. 体积应变为零

7. 对于如图 7-35 所示的应力状态（$\sigma_1>\sigma_2>0$），最大切应力作用面有以下四种，试选择哪一种是正确的_______。

A. 平行于 σ_2 的面，其法线与 σ_1 夹 45° 角

B. 平行于 σ_1 的面，其法线与 σ_2 夹 45° 角

C. 垂直于 σ_1 和 σ_2 作用线组成平面的面，其法线与 σ_1 夹 45° 角

D. 垂直于 σ_1 和 σ_2 作用线组成平面的面，其法线与 σ_2 夹 30° 角

8. 铸铁构件的危险点的应力状态如图 7-36 所示四种情况，则：_______。

A. 四种情况安全性相同

B. 四种情况安全性各不相同

C. a 与 b 相同，c 与 d 相同，但 a、b 与 c、d 不同

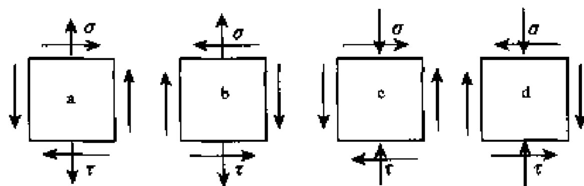


图 7-36

D. a 与 c 相同，b 与 d 相同，但 a、c 与 b、d 不同

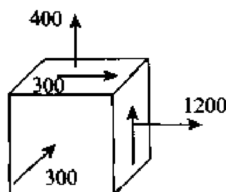
四、判断题

1. 在各种受力情况下，脆性材料都将发生脆性断裂而破坏。(　　)
2. 任一单元体，在最大正应力作用面上，剪应力为零。(　　)
3. 在某单元体上叠加一个纯剪切应力状态后，体积改变比能不变。(　　)

五、计算题

1. 试求如图 7-37 所示应力状态的主应力及最大剪应力。(单位：MPa)

2. 一薄壁圆筒，如图 7-38 所示，同时承受内压和扭转作用。已知筒体平均直径为 $D=40\text{cm}$，壁厚 $\delta=1\text{cm}$，材料 $[\sigma]=160\text{MPa}$，$P=6\text{MPa}$，$M=32\pi\text{kN}\cdot\text{m}$。试根据第三强度理论校核筒体强度。



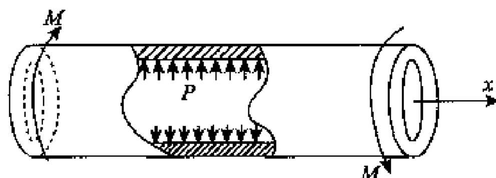


图 7-37　　　　图 7-38

3. 某点的应力状态如图 7-39 所示，已知 σ_x，σ_y 与角 α，试根据已知数据直接做出应力圆。

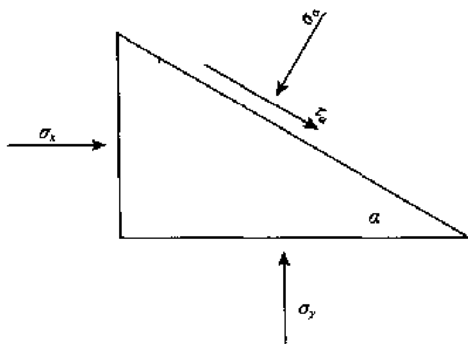


图 7-39

4. 如图 7-40 所示，直径 2cm 的受扭圆轴，测得与轴线成 45°方向的线应变 $\varepsilon_{45^\circ}=520\times10^{-6}$，已知 E=200GPa，$\mu$=0.3，试求扭转力矩 T。

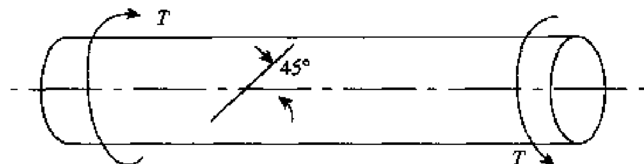


图 7-40

5. 如图 7-41 所示，钢制曲拐的横截面直径 20mm，C 端与钢丝相连，钢丝的横截面面积 A=6.5mm^2。曲拐和钢丝弹性模量同为 200GPa，G=84GPa，若钢丝的温度降低 50°，且 α=12.5$\times10^{-6}$1/℃。试求曲拐截面 A 的顶点的应力状态。

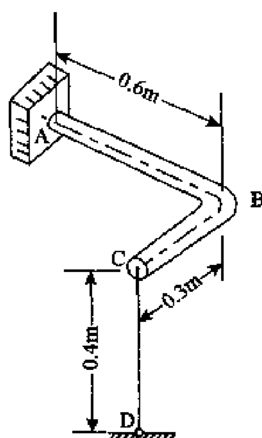


图 7-41

第 8 章　组合变形

知识要点

本章主要介绍了组合理论的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)拉伸与压缩与弯曲的组合；

(2)偏心拉压；

(3)扭转和弯曲的组合变形。

第一节　本章内容总结

1. 构件的受力情况

构件的受力情况分为基本受力(或基本变形)形式(如中心受拉或受压，扭转，平面弯曲，剪切)和组合受力(或组合变形)形式。

组合变形由两种以上基本变形形式组成。

处理组合变形构件的内力、应力和变形(位移)问题时，可以运用基于叠加原理的叠加法。

叠加原理：如果内力、应力、变形等与外力成线性关系，则在小变形条件下，复杂受力情况下组合变形构件的内力、应力、变形等力学响应可以分成几个基本变形单独受力情况下相应力学响应的叠加，且与各单独受力的加载次序无关。

说明：

(1)保证上述线性关系的条件是纯弹性材料，加载在弹性范围内，即服从胡克定律；

(2)必须是小变形，保证能按构件初始形状或尺寸进行分解与叠加计算，且能保证与加载次序无关。

2. 斜弯曲

当梁所受到的横向力不在梁的主惯性平面内时，梁将发生斜弯曲。如图 8-1a 所示的构件

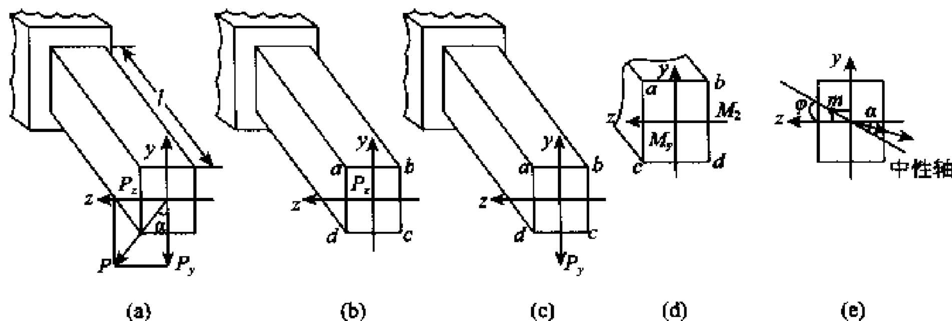


图 8-1

具有两个对称面(y,z为对称轴),横向载荷P通过截面形心与y轴成α夹角,现按叠加法讲解梁内最大弯曲正应力的求解思路与步骤:

(1)根据圣维南原理,将载荷按基本变形加载条件进行静力等效处理,现将P沿横截面对称轴分解为P_y、P_z,则有$P_y = P\cos\alpha$,$P_z = P\sin\alpha$(图8-1a)。

(2)得到相应的几种基本变形形式,分别计算可能危险点上的应力。现分别按两个平面弯曲计算(见图8-1(b)及图8-1(c))。如图8-1(d)所示,P_y,P_z在危险面(面定端)处分别有弯矩:$M_y = (P\sin\alpha)l$,$M_z = (P\cos\alpha)l$。M_y作用下产生以y轴为中性轴的平面弯曲,bc与ad边上分别产生最大拉应力与最大压应力:

$$\sigma'_{max} = \pm\frac{M_y}{W_y} = \pm\frac{6Pl\sin\alpha}{b^2h}$$

M_z作用下产生以z轴为中性轴的平面弯曲,ab与cd边上分别产生最大拉应力与最大压应力:

$$\sigma''_{max} = \pm\frac{M_z}{W_z} = \pm\frac{6Pl\cos\alpha}{bh^2}$$

(3)由叠加法得组合变形情况下,亦即原载荷作用下危险点的应力。现可求得P_y,P_z共同作用下危险点(b、d点)弯曲正应力(同一点同一微面上的正应力代数相加):

$$|\sigma|_{max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{6Pl}{b^2h^2}(h\sin\alpha + b\cos\alpha)$$

上述横向载荷P构成的弯曲是梁在两个主惯性平面内弯曲的组合变形,其中横截面内中性轴不再与载荷作用线垂直;或中性轴不再与弯矩矢量重合(如为实心构件)。如图8-1(e)所示,横截面上任意点$m(y,z)$的正应力为:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = -\frac{M_y}{I_y}z + \frac{M_z}{I_z}y$$

根据中性轴定义,令$\sigma=0$,即得中性轴位置表达式:

$$\tan\varphi = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\frac{M_y}{M_z} = \frac{I_z}{I_y}\tan\alpha$$

当$I_z \neq I_y$,$\varphi \neq \alpha$;现为矩形($h>b$),$I_z > I_y$,则$\varphi > \alpha$。形成斜弯曲,中性轴与M矢量不重合。

当$I_z = I_y$,$\varphi = \alpha$,即载荷通过截面形心任意方向均形成平面弯曲,若圆截面直径为D,则有:

$$|\sigma|_{max} = \frac{M}{W} = \frac{32}{\pi D^3}\sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

3. 拉伸(压缩)与弯曲的组合

(1)求解此类问题一般分别计算拉伸(压缩)正应力和弯曲正应力,叠加后进行强度计算。

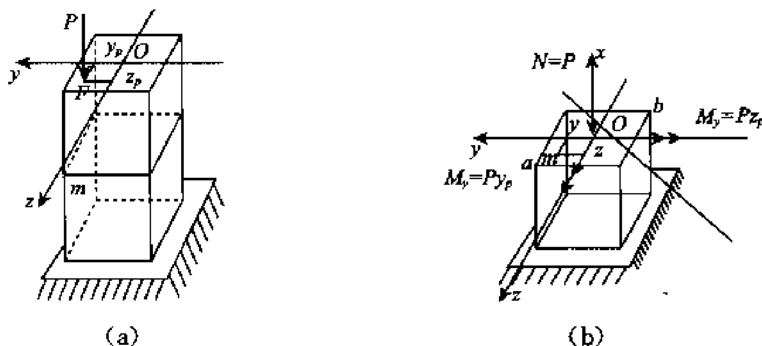
拉伸(压缩)时,杆件截面的正应力为:$\sigma_N = \frac{P}{A}$

弯曲时,横截面的最大拉压正应力为:$\sigma_M = \pm\frac{M}{W}$

拉伸(压缩)与弯曲的组合,横截面的最大拉压正应力:$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{W}$

(2)当作用在杆件上的轴向力作用线偏离杆轴线时，称为偏心拉伸(压缩)，典型问题即求危险点应力状况。

求解思路如下：



(a) (b)

图 8-2

如图 8-2a 所示的偏心压缩问题，用上述载荷处理法，将作用于点 $F(y_p, z_p)$ 的偏心载荷 P 向构件轴线(或端面形心 O)平移，得到相应于中心压缩和两个平面弯曲的外载荷。

另外，还可以直接用截面法(内力处理法)。如图 8-2b 所示，端面上偏心压缩力 P 在横截面上产生的内力分量为：

$$N = P, M_y = Pz_p, M_z = Py_p$$

在该横截面上任意点 $m(y, z)$ 的正应力为压应力和两个平面弯曲(分别绕 y 和 z 轴)正应力的叠加：

$$\sigma_m = -\frac{P}{A} - \frac{Pz_P z}{I_y} - \frac{Py_P y}{I_z}$$

a 点有最大压应力 σ_a，b 点有最大拉应力 σ_b：

$$\sigma_a = \sigma_{max}^{压} = -\frac{P}{A} - \frac{Pz_P}{W_y} - \frac{Py_P}{W_z}$$

$$\sigma_b = \sigma_{max}^{拉} = -\frac{P}{A} + \frac{Py_P}{W_y} + \frac{Pz_P}{W_z}$$

其中 $W_y = \frac{I_y}{z_{max}}, W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$

(3)求中性轴位置和截面核心

如果 $\sigma_m = 0$，并定义截面惯性半径 $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$，$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$。设中性轴上任意点坐标为 y_o，z_o。可得

$$1 + \frac{z_p z_o}{i_y^2} + \frac{y_p y_o}{i_z^2} = 0$$

这是一不通过形心 O 的中性轴方程(直线方程)。它在 y 轴和 z 轴上截距分别为：

$$y_{ot} = -\frac{i_z^2}{y_p}, \ z_{ot} = -\frac{i_y^2}{z_p}$$

对于混凝土、大理石等抗拉能力比抗压能力小得多的材料，设计时不希望偏心压缩在构件中产生拉应力。

满足这一条件的压缩载荷的偏心距 y_p，z_p应控制在横截面中一定范围内(使中性轴不会与

截面相割，最多只能与截面周线相切或重合)，由上式可得：

$$y_p=-\frac{i_z^2}{y_{ot}},\ z_p=-\frac{i_y^2}{z_{ot}}$$

横截面上存在的这一范围称为截面核心，它由上式的偏心距轨迹线围成。式中 y_{ot}，z_{ot}现为横截面周边(轮廓线)上一点的坐标。

4. 弯曲和扭转的组合

(1)圆截面杆件

对圆截面，通过圆心(形心)的任意方向的轴均为对称轴，设圆截面杆横截面上分别作用有弯矩 M_y，M_z和扭矩 T，则合力矩：$M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}$ 。

这时 M 作用下圆轴产生平面弯曲，σ 及剪应力 τ 分别为：

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2}}{W},\ \tau=\frac{T}{W_p}$$

危险点应力状态的主应力为：$\sigma_{1,3}=\frac{\sigma}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}$，$\sigma_2=0$

对塑性材料，可选用第三和第四强度条件：

$$\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma]$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\leqslant[\sigma]$$

对直径为 d 的圆截面，有 $W_p=2W$，$W=\frac{\pi}{32}d^3$，于是有：

$$\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}\leqslant[\sigma]\ ;\ \frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}\leqslant[\sigma]$$

(2)矩形截面杆

设图 8-3(a)和(b)所示为矩形截面上作用有弯矩 M_y，M_z 和扭矩 T。

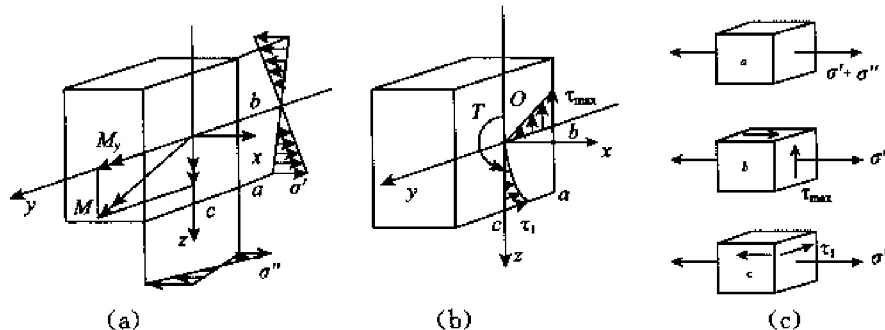


图 8-3

对矩形截面($b\times h$)，M_y，M_z分别形成以 y 轴和 z 轴为中性轴的平面弯曲，弯曲正应力分布如图 8-3(a)所示。扭矩 T 在矩形截面上形成的扭转剪应力分布如图 8-3(b)所示。

综合考虑弯曲正应力和扭转剪应力的分布情况，可以选出危险点 a、b、c，其应力状态如图 8-3(c)所示。

a 点具有正应力最大值：$\sigma_a=\sigma'+\sigma''=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}$，$W_y=\frac{bh^2}{6}$，$W_z=\frac{hb^2}{6}$

b 点具有 τ_{max} 和 σ''：$\sigma_b = \sigma'' = \dfrac{M_z}{W_z}$，$\tau_{max} = \dfrac{T}{\alpha h b^2}$

c 点具有 τ_1 和 σ'：$\sigma_c = \sigma' = \dfrac{M_y}{M_y}$，$\tau_1 = \nu\tau_{max}$

对塑性材料，a 点的强度条件为：$\sigma_a = \dfrac{M_y}{W_y} + \dfrac{M_z}{W_z} \leqslant [\sigma]$

对 b，c 点可选择第三或第四强度理论，如选第三强度理论，可比较 $\sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_{max}^2}$ 和 $\sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_1^2}$，较大者应满足：$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]$。

第二节 典型题分析

重要考点提示：

(1)组合变形下的强度校核(四大强度理论)；
(2)组合变形下的危险点的判断；
(3)利用叠加法对组合变形的计算。

【例 1】 如图 8-4 所示直角拐轴 ABC 在 $x_1 - y_1$ 平面内受载荷 P 的作用，试根据第三强度理论校核 AB 轴的强度。已知：$P = \sqrt{2}$kN，l=160mm，d=30mm，$[\sigma]$=120MPa。(注：$x_1 - y_1$ 平面与 $x - y$ 平面平行)(北京航空航天大学，2001 年)

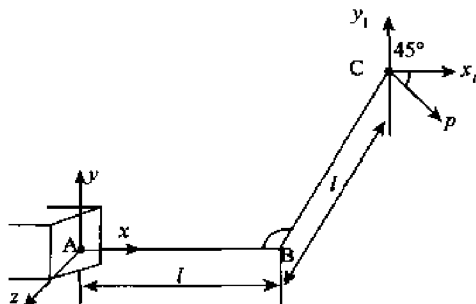


图 8-4

解 由题图容易知道固定端 A 是直角拐轴 ABC 的危险截面。该截面的轴向拉力是，

$$N = P\cos45° = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1(\text{kN})$$

相应的截面拉力是：$\sigma_1 = \dfrac{N}{A} = \dfrac{1 \times 10^3}{\dfrac{\pi}{4} \times (30 \times 10^{-3})^2} = 1.4 \times 10^6(\text{Pa}) = 1.4(\text{MPa})$

该截面绕 z 轴的弯矩是：$M_Z = P\sin45° \cdot l = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 0.16 = 160(\text{N} \cdot \text{m})$

该截面绕 y 轴的的弯矩是：$M_y = P\cos45° \cdot l = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 0.16 = 160(\text{N} \cdot \text{m})$

合弯矩是：$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{160^2 + 160^2} = 226(\text{N} \cdot \text{m})$
相应的截面拉应力是：

$$\sigma_2 = \frac{M}{W_z} + \frac{N}{A} = \frac{226}{\frac{1}{32} \times \pi \times (30 \times 10^{-3})^3} + 1.4 \times 10^6 = 86.8 \times 10^6 (\text{Pa}) = 86.8 (\text{MPa})$$

该截面的扭矩是：$T = P\sin 45° \cdot l = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0.16 = 160 (\text{N} \cdot \text{m})$

相应截面最大剪应力是：$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{160}{\frac{1}{16} \times \pi \times (30 \times 10^{-3})^3} = 30.2 \times 10^6 (\text{Pa}) = 30.2 (\text{MPa})$

A 截面上危险点的单元体分析如图 8-5 所示。

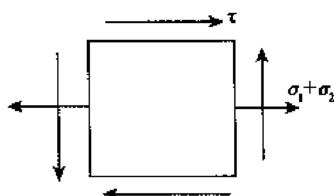


图 8-5

由第三强度理论，

$$\sigma_{r3} = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(1.4 + 85.3)^2 + 30.2^2} = 105.7 (\text{MPa}) < [\sigma] = 120 (\text{MPa})$$

所以，AB 轴的强度满足要求。

评注：在求解组合变形时，应该把组合变形分解成几个基本变形，找到杆件的危险截面和危险点，然后采用叠加法计算危险点的正应力和剪应力，求出危险点的三个主应力，用强度理论校核其强度。

【例 2】 如图 8-6 所示一端面定的空心圆轴，已知：外径 D=60mm，内径 d=30mm；l=0.6m。材料弹性常数是 E=200GPa，μ=0.3，$[\sigma]$=200MPa；自由端受扭矩 T = 3kN · m，集中力 P_1=3kN 和 P_2=50kN 作用，试求：

(1)危险点的主应力和最大线应变 ε_{max}；

(2)用最大剪应力理论校核强度。(南京航空航天大学，2002 年)

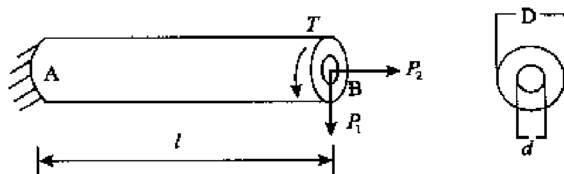


图 8-6

解　由题意，固定端 A 截面是杆 AB 的危险截面。

该截面的轴力是：$N = P_2 = 50\text{kN}$

由轴力而形成的正应力是：$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{50 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times (0.06^2 - 0.03^2)} = 23.6 \times 10^6 (\text{Pa}) =$

23.6(MPa)

该截面的弯矩是：$M = P_1 l = 3 \times 0.6 = 1.8(\text{kN} \cdot \text{m})$

由弯矩在截面形成的最大拉应力是：$\sigma_2 = \dfrac{M}{W_z} = \dfrac{1.8 \times 10^3}{\frac{1}{32} \times \pi \times 0.06^3 \times [1-(0.5)^4]} = 90.6(\text{MPa})$

该截面的扭矩是：$T = 3\text{kN} \cdot \text{m}$

由扭矩在截面形成的最大剪应力是：

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{3 \times 10^3}{\frac{1}{16} \times \pi \times 0.06^3 \times [1-(0.5)^4]} = 75.5 \times 10^6(\text{Pa}) = 75.5(\text{MPa})$$

对 A 截面危险点取单元体进行分析如图 8-7 所示，

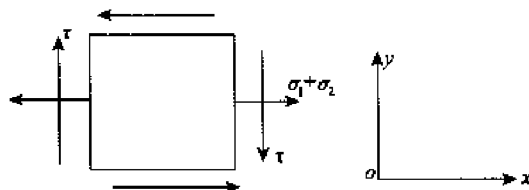


图 8-7

由主应力计算公式，

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + 0}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 0}{2})^2 + \tau^2}$$

$$= \frac{114.2}{2} + \sqrt{(\frac{114.2}{2})^2 + 75.5^2} = 151.8(\text{MPa})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + 0}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 0}{2})^2 + \tau^2}$$

$$= \frac{114.2}{2} - \sqrt{(\frac{114.2}{2})^2 + 75.5^2} = -37.6(\text{MPa})$$

比较各主应力大小知道 $\sigma_1 = 151.8\text{MPa}$，$\sigma_2 = 0\text{MPa}$，$\sigma_3 = -37.6\text{MPa}$。由广义胡克定律，最大线应变是，

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{151.8 - 0.3 \times (0 - 37.6)}{200 \times 10^3} = 8.0 \times 10^{-4}$$

由最大剪应力强度理论，

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 151.8 - (-37.6) = 189.4(\text{MPa}) < [\sigma] = 200\text{MPa}$$

所以，该轴满足强度要求。

评注：组合变形的计算量一般较大，读者要引起注意。

【例 3】 如图 8-8 所示已知水平面内圆形截面直角拐 B 端固定，直径 $d = 16\text{cm}$，AB 段的分布力 q 和自由端 C 处集中力 P_1 的方向为垂直向；自由端 C 处集中力 P_2 的方向为水平向，且与 AB 段轴线平行；材料的允许应力是$[\sigma] = 160\text{MPa}$，试按照第四强度理论校核 AB 段的强度。（武汉大学，2003 年）

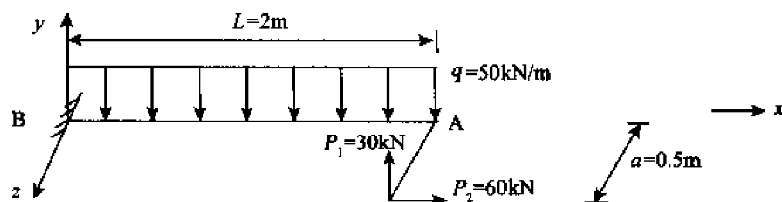


图 8-8

解 AB段的轴力是：$N=P_2=60\text{kN}$

由轴力在AB段形成的正应力是：$\sigma_1=\dfrac{N}{A}=\dfrac{60\times10^3}{\dfrac{\pi}{4}\times(16\times10^{-2})^2}=3\times10^6(\text{Pa})=3(\text{MPa})$

AB段中绕 y 轴的弯矩是：$M_y=P_2a=60\times0.5=30(\text{kN}\cdot\text{m})$

设AB段中绕 z 轴的弯矩为 $M_z(s)=P_1s-\dfrac{qs^2}{2}$，极值发生在离A端S距离处，那么由驻值条件，

$$\frac{\text{d}M_z}{\text{d}s}=Q=P_1-qs=30-50\cdot s=0$$

$$s=\frac{30}{50}=0.6\text{m}$$

且 $M_z(s)=30\times0.6-\dfrac{1}{2}\times50\times(0.6)^2=9(\text{kN}\cdot\text{m})$

而B端处绕 z 轴的弯矩是：$M_z=40\text{kN}\cdot\text{m}$

则AB段中绕 Z 轴的弯矩最大值是：$M_z=40\text{kN}\cdot\text{m}$

合弯矩是：$M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}=\sqrt{30^2+40^2}=50(\text{kN}\cdot\text{m})$

在AB段中形成的最大拉应力是：$\sigma=\dfrac{M}{W_z}=\dfrac{50\times10^3}{\dfrac{1}{32}\times\pi\times(0.16)^3}=124.4(\text{MPa})$

AB段中的扭矩是：$T=P_1a=30\times0.5=15(\text{kN}\cdot\text{m})$

在AB段中形成的最大剪应力是：

$$\text{I}=\frac{T}{W_\text{P}}=\frac{15\times10^3}{\dfrac{1}{16}\times\pi\times(0.16)^3}=18.7\times10^6(\text{Pa})=18.7(\text{MPa})$$

在AB段上的危险点取单元体分析如图8-9所示，

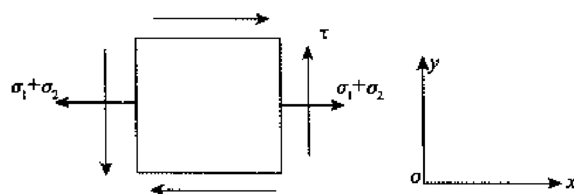


图 8-9

由主应力计算公式，

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+0}{2}+\sqrt{(\frac{\sigma_1+\sigma_2-0}{2})^2+\tau^2}$$

$$=\frac{127.4}{2}+\sqrt{(\frac{127.4}{2})^2+18.7^2}=130(\text{MPa})$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+0}{2}-\sqrt{(\frac{\sigma_1+\sigma_2-0}{2})^2+\tau^2}$$

$$=\frac{127.4}{2}-\sqrt{(\frac{127.4}{2})^2+18.7^2}=-2.7(\text{MPa})$$

比较各主应力大小知道 $\sigma_1=130\text{MPa}$,$\sigma_2=0\text{MPa}$,$\sigma_3=-2.7\text{MPa}$。

由第四强度理论,

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=132(\text{MPa})<[\sigma]=160(\text{MPa})$$

所以 AB 段杆的强度满足要求。

评注:要正确判断危险截面的位置,才能正确的进行强度校核。

【例 4】 如图 8-10 所示水平直角折杆受竖直力 P 作用,已知轴直径 $d=100\text{mm}$;$a=400\text{mm}$;弹性模量 $E=200\text{GPa}$;在 D 截面顶点 K 测出轴向应变 $\varepsilon=2.75\times8^{-9}$。试求该折杆危险点的相当应力 σ_{r3}。(北京航空航天大学,2002 年)

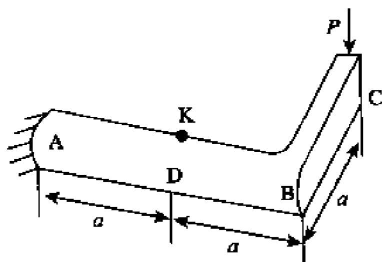


图 8-10

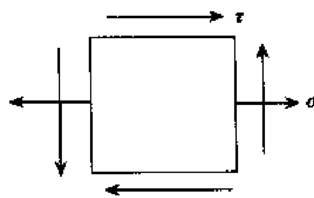


图 8-11

解 D 截面顶点 K 处的弯矩是: $M=Pa$

应力状态如图 8-11 所示。

由弯矩在该点形成的正应力是:

$$\sigma=\frac{M}{W_z}=\frac{Pa}{\frac{1}{32}\times\pi\times(0.1)^3}=E\varepsilon=200\times10^9\times2.75\times10^{-9}=55\times10^6(\text{Pa})$$

从中解出 $P=13.5\text{kN}$

从图中不难发现直角折杆的危险截面是 A 截面。

该截面的弯矩是: $M=P\cdot2a=13.5\times2\times0.4=10.8(\text{kN}\cdot\text{m})$

由弯矩在截面形成的最大正压力是:

$$\sigma=\frac{M}{W_z}=\frac{10.8\times10^3}{\frac{1}{32}\times\pi\times(0.1)^3}=110\times10^6(\text{Pa})=110(\text{MPa})$$

该截面的扭矩是: $T=Pa=13.5\times0.4=5.4(\text{kN}\cdot\text{m})$

由扭矩在截面形成的最大剪应力是: $\tau=\frac{T}{W_P}=\frac{5.4\times10^3}{\frac{1}{16}\times\pi\times(0.1)^3}=27.5\times10^3(\text{Pa})=27.5(\text{MPa})$

由第三强度理论：$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 123(\text{MPa})$

评注：圆杆的弯扭组合变形强度计算公式采用内力公式，即 $\sigma_{r3} = \frac{1}{W} \cdot \sqrt{M^2 + T^2}$ 则更为方便。

【例 5】 钢制立柱上承受纵向载荷 P 如图 8-12 所示。现在 A、B、C、D 处测得 x 方向的线应变 $\varepsilon_x(A) = -225 \times 8^{-6}$，$\varepsilon_x(B) = -675 \times 8^{-6}$，$\varepsilon_x(C) = -375 \times 8^{-6}$，$\varepsilon_x(D) = -75 \times 8^{-6}$。若已知钢的模量 $E = 200\text{GPa}$。试求：

(1)力 P 的大小

(2)加力点在 yoz 坐标中的坐标值。(华中科技大学，2003 年)

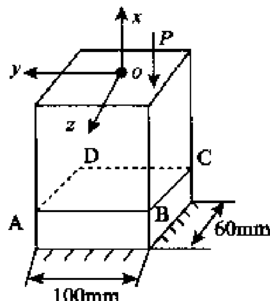


图 8-12

解 由胡克定律容易知道 A、B、C 三点沿 X 方向的正应力是，

$\sigma_A = E \cdot \varepsilon_x(A) = 200 \times 10^9 \times (-225 \times 8^{-6}) = -45 \times 10^6(\text{Pa}) = -45\text{MPa}$

$\sigma_B = E \cdot \varepsilon_x(B) = 200 \times 10^9 \times (-675 \times 8^{-6}) = -135 \times 10^6(Pa) = -135(\text{MPa})$

$\sigma_c = E \cdot \varepsilon_x(C) = 200 \times 10^9 \times (375 \times 8^{-6}) = 75 \times 10^6(\text{Pa}) = 75(MPa)$

将偏心载荷 P 向形心简化得到轴力 P。绕 y 轴弯矩 M_y 和绕 z 轴的弯矩 M_z，那么，A、B、C 各点应力可以表示成

$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = \frac{P}{0.1 \times 0.05} + \frac{M_y}{\frac{1}{6} \times 0.1 \times (0.05)^2} - \frac{M_z}{\frac{1}{6} \times 0.05 \times (0.1)^2} = -45 \times 10^6(\text{Pa})$$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{P}{0.1 \times 0.05} + \frac{M_y}{\frac{1}{6} \times 0.1 \times (0.05)^2} + \frac{M_z}{\frac{1}{6} \times 0.05 \times (0.1)^2} = -135 \times 10^6(\text{Pa})$$

$$\sigma_C = \frac{P}{A} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} = \frac{P}{0.1 \times 0.05} - \frac{M_y}{\frac{1}{6} \times 0.1 \times (0.05)^2} - \frac{M_z}{\frac{1}{6} \times 0.05 \times (0.1)^2} = 75 \times 10^6(\text{Pa})$$

从中解出 $P = -150\text{kN}$，$M_y = 2.5(\text{kN} \cdot \text{m})$，$M_z = -3.75(\text{kN} \cdot \text{m})$。

而 $M_y = Pz$，$M_z = -Py$，于是，

$$Y = -\frac{M_z}{P} = -\frac{-3.75}{-150} = -0.025(\text{m}) = -25(\text{mm})$$

$$z = \frac{M_y}{p} = \frac{2.5}{-150} = -0.017(\text{m}) = -17(\text{mm})$$

即加力点在 yoz 坐标中的坐标值是(−25，−17)。

评注：偏心载荷可以简化成经过形心的轴力和弯矩，读者在求解此类习题时可沿着这个套路。

【例 6】 一端固定,另一端自由的矩形截面钢杆 AB 在其自由端顶部中点 C 处作用有偏心拉力 P,如图 8-13 所示,图中的 b 和 h 均为已知。材料的许用应力和弹性模量是$[\sigma]$和 E。试求 P 的最大值及杆在自由端底部任一点 D 的竖向位移和水平位移。(大连理工大学,2002 年)。

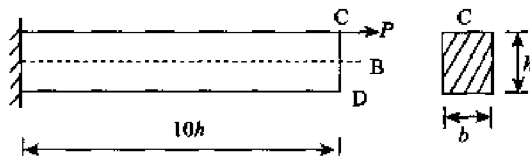


图 8-13

解 (方法一)由题图,杆 AB 中的最大正应力是:

$$\sigma = \frac{P}{\mathrm{A}} + \frac{P \cdot \frac{h}{2}}{W_z} = \frac{P}{bh} + \frac{P \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{4P}{bh} \leqslant [\sigma]$$

于是得到 P 的最大值是:$P_{\max} = \frac{1}{4}bh \cdot [\sigma]$

将偏心拉力 P 向形心 B 简化成轴力 P 和弯矩 $\frac{1}{2}Ph$ 。

由轴力 P 在 B 点引起的水平位移是:

$$\Delta_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} = \frac{P}{\mathrm{EA}} \cdot 10h = \frac{P}{\mathrm{E}bh} \cdot 10h = \frac{10P}{\mathrm{E}b} \text{(水平向右)}$$

由弯矩 $\frac{1}{2}Ph$ 在 B 点引起的竖向位移是:

$$\Delta_{\mathrm{V}}^{\mathrm{B}} = \frac{\frac{1}{2}Ph \cdot (10h)^2}{2\mathrm{EI}} = \frac{\frac{1}{2}Ph \cdot (10h)^2}{2\mathrm{E} \cdot \frac{1}{12}bh^3} = \frac{300P}{\mathrm{E}b} \text{(竖直向下)}$$

由弯矩 $\frac{1}{2}Ph$ 在 CD 截面引起的转角是:

$$\theta^{\mathrm{B}} = \frac{\frac{1}{2}Ph \cdot 10h}{\mathrm{EI}} = \frac{5Ph^2}{\mathrm{E} \cdot \frac{1}{12}bh^3} = \frac{60P}{\mathrm{E}bh} \text{(沿顺时针方向)}$$

那么,D 点的位移是:

$$\Delta_{\mathrm{H}}^{\mathrm{D}} = \Delta_{\mathrm{H}}^{\mathrm{B}} - \theta^{\mathrm{B}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{10P}{\mathrm{E}b} - \frac{60P}{\mathrm{E}bh} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{20P}{\mathrm{E}b} \text{(负号表示水平向左)}$$

D 点的竖向位移是:

$$\Delta_{\mathrm{V}}^{\mathrm{D}} = \Delta_{\mathrm{V}}^{\mathrm{B}} = \frac{300P}{\mathrm{E}b} \text{(竖直向下)}$$

(方法二) P 的最大值同方法一。

在 D 点加一竖向单位力,如图 8-14 所示。任意截面 x 处的载荷。竖向单位力的弯矩方程和轴力方程分别是:

$$M(x) = -P \cdot \frac{h}{2} \qquad N(x) = P$$

$$M^{\circ}(x) = -x \qquad N^{\circ}(x) = 0$$

于是，由莫尔积分，得到 D 点的竖向位移

$\Delta_V^D = \frac{1}{EI} \cdot \int M(x) \cdot M^{\circ}(x) dx + \frac{1}{EA} \cdot \int N(x) N^{\circ}(x) dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{10h} P \cdot \frac{h}{2} \cdot x dx = \frac{300P}{Eb}$（竖直向下）

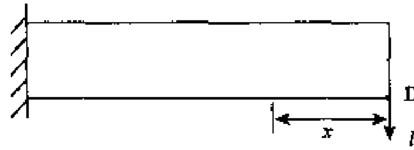


图 8-14

在 D 点加一水平单位力，如图 8-15 所示。任意截面 x 处的载荷、水平单位力的弯矩方程和轴力方程分别是：

$$M(x) = -P \cdot \frac{h}{2} \qquad N(x) = P$$

$$M^{\circ}(x) = \frac{h}{2} \qquad N^{\circ}(x) = l$$

于是，D 点的水平位移是：

$\Delta_H^D = \frac{1}{EI} \cdot \int M(x) M^{\circ}(x) dx + \frac{1}{EA} \cdot \int N(x) N^{\circ}(x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{10h} -P \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} dx + \frac{1}{EA} \cdot \int_0^{10h} P \cdot 1 \cdot dx = \frac{-20P}{Eb}$（负号表示水平向左）

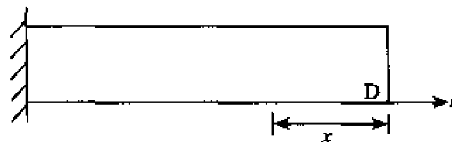


图 8-15

（方法三）P 的最大值同方法一

假设 D 点作用有水平载荷 H 和竖向载荷 V，如图 8-16 所示。

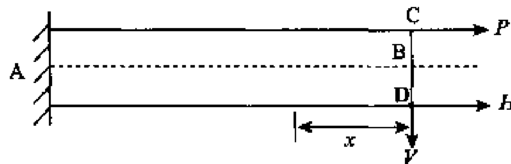


图 8-16

那么任意 x 截面上的弯矩方程和轴力方程是：

$$\begin{cases} M(x) = (H - P) \cdot \frac{h}{2} - V \cdot X \\ N(x) = H + P \end{cases}$$

其对 H 和 V 的偏导数分别是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial H}=\dfrac{h}{2} & \dfrac{\partial N}{\partial H}=1 \\ \dfrac{\partial M}{\partial V}=-x & \dfrac{\partial N}{\partial V}=0\end{cases}$$

于是，D 点的水平位移是：

$$\Delta_H^D=\frac{\partial U}{\partial H}=\int\frac{N}{EA}\cdot\frac{\partial N}{\partial H}\cdot dx+\int\frac{M}{EI}\cdot\frac{\partial M}{\partial H}dx=\int_0^{10h}\frac{H+P}{E\cdot bh}\cdot 1\cdot dx+\int_0^{10h}\frac{(H-P)\cdot\frac{h}{2}-Vx}{E\cdot\frac{1}{12}bh^3}\cdot\frac{h}{2}dx$$

$$=\frac{10(H+P)}{Eb}+\frac{30(H-P)-300V}{Eb}=\frac{40H-20P-300V}{Eb}$$

当 $H=V=0$ 时，$\Delta_H^D=\dfrac{-20P}{Eb}$（负号表示水平向左）

D 点的竖向位移是：

$$\Delta_V^D=\frac{\partial U}{\partial V}=\int\frac{N}{EA}\cdot\frac{\partial N}{\partial V}\cdot dx+\int\frac{M}{EI}\cdot\frac{\partial M}{\partial V}\cdot dx=\int_0^{10h}\frac{H+P}{Ebh}\cdot 0\cdot dx+\int_0^{10h}\frac{(H-P)\frac{h}{2}-Vx}{E\cdot\frac{1}{12}bh^3}\cdot$$

$$(-x)dx$$

$$=-\frac{3(H-P)\cdot 100h^3-V\cdot 4000h^3}{Ebh^3}=\frac{-300H+300P+4000V}{Eb}$$

当 $H=V=0$ 时，$\Delta_V^D=\dfrac{300P}{Eb}$（竖直向下）

评注：本题可以分别采用组合变形方法（方法一）、莫尔积分法（方法二）和卡氏定理方法（方法三）来求解 D 点位移，体现 3 位移求解的灵活性，读者应认真体会。

【例 7】 直径为 d 的圆形截面直角曲拐，自由端受到面内与铅垂直方向成 θ 角的斜向力 P 的作用，如图 8-17 所示。当 θ 角取 45°时，试求曲拐上危险点在最大剪应力理论下的相当应力。（华中科技大学，2003 年）

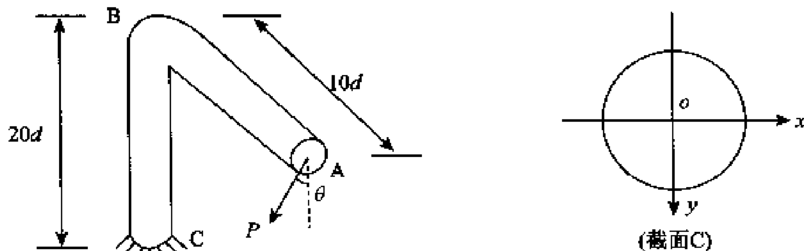


图 8-17

解　由题图容易知道截面 C 是危险截面。

该截面的轴力是：$N=P\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}P$

由轴力在截面形成的正应力是：$\sigma_1 = \dfrac{N}{A} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}P}{\dfrac{1}{4}\pi d^2} = \dfrac{2\sqrt{2}P}{\pi d^2}$

该截面绕 x 轴的弯矩是：$M_x = P\cos\theta \cdot 10d = 5\sqrt{2}Pd$

该截面绕 y 轴的弯矩是：$M_y = P\sin\theta \cdot 20d = 10\sqrt{2}Pd$

合弯矩是：$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{(5\sqrt{2}Pd)^2 + (10\sqrt{2}Pd)^2} = 15.8Pd$

由弯矩在截面形成的最大正应力是：$\sigma_2 = \dfrac{M}{W_z} = \dfrac{15.8Pd}{\dfrac{1}{32}\pi d^3} = 505.6 \cdot \dfrac{P}{\pi d^2}$

该截面的扭矩是：$T = P\sin\theta \cdot 10d = 5\sqrt{2}Pd$

由扭矩在截面形成的最大剪应力是：$\tau = \dfrac{T}{W_p} = \dfrac{5\sqrt{2}Pd}{\dfrac{1}{16}\pi d^3} = 80\sqrt{2} \cdot \dfrac{P}{\pi d^2}$

在截面危险点取单元体分析如图 8-18 所示

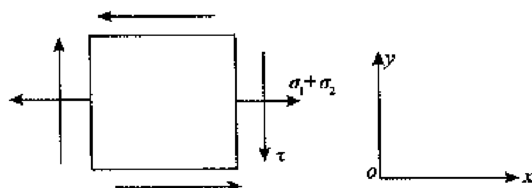


图 8-18

由最大剪应力理论，

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4\tau^2}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2} + 505.6)^2 + 4 \times (80\sqrt{2})^2} \cdot \frac{P}{\pi d^2} = 556 \cdot \frac{P}{\pi d^2} = 177 \cdot \frac{P}{d^2}$$

评注：这是一道考察组合变形和强度理论的基础题，掌握各相关概念便可。

【例 8】 如图 8-19 所示，直径为 60cm 的两个相同皮带轮，当 $n = 100\text{r/min}$ 时，传递功率 $N = 7.36\text{kW}$，C 轮上皮带是水平的，D 轮上是铅垂方向的。皮带拉力 $T_1 = 1.5\text{kN}$，$T_1 > T_2$。设轴材料许用应力 $[\sigma] = 80\text{MPa}$；试根据第三强度理论选择轴的直径，皮带轮的自重略去不计。（华东理工大学，2001 年）

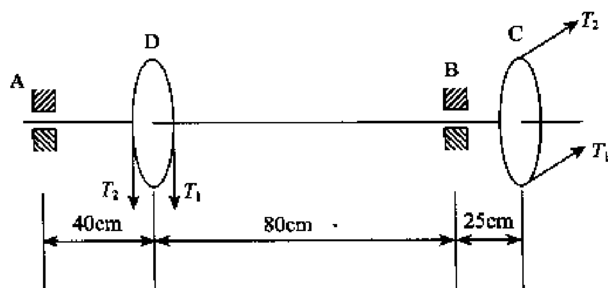


图 8-19

解 由功率的计算公式，皮带轮传递的扭矩是，

$$M = \frac{P}{\frac{2\pi n}{60}} = 9.55 \cdot \frac{p}{n} = 9.55 \times \frac{7.36}{100} = 0.7(\text{kN} \cdot \text{m})$$

而 $M = (T_1 - T_2)R$

于是 $T_1 = \frac{M + T_2 R}{R} = \frac{0.7 + 1.5 \times 0.3}{0.3} = 3.83(\text{kN})$

将皮带轮的拉力向轴线简化，如图 8-20 所示，

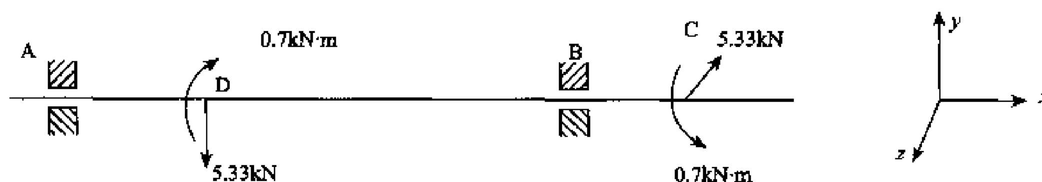


图 8-20

轴的内力图如图 8-20 所示：

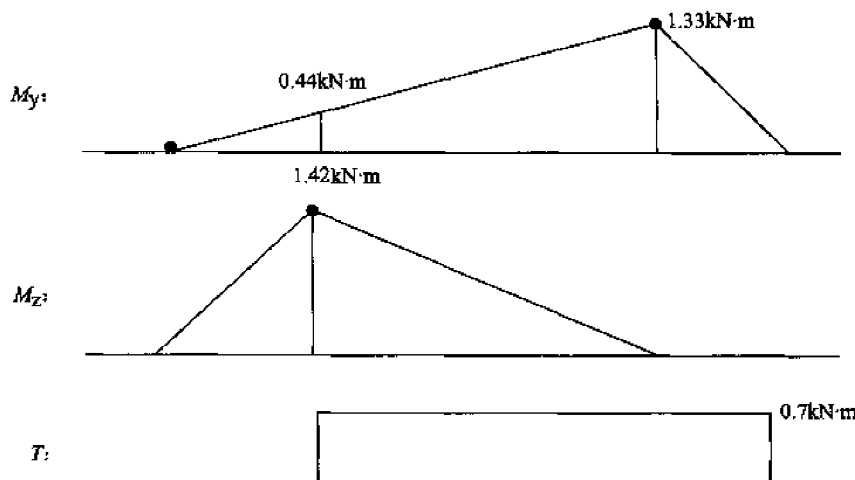


图 8-21

从图 8-21 知道 D 截而是危险截面。

该截面的合弯矩是：$M = \sqrt{0.44^2 + 1.42^2} = 1.48(\text{kN} \cdot \text{m})$

该截面的扭矩是：$T = 0.7\text{kN} \cdot \text{m}$

由第三强度理论(内力形式)，

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W_z} \cdot \sqrt{T^2 + M^2} \leqslant [\sigma] = 80(\text{MPa}) = 80 \times 10^6(\text{Pa})$$

即 $\frac{1}{\frac{1}{32}\pi d^3} \times 1.64 \times 10^3 \leqslant 80 \times 10^6$

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{1.64 \times 10^3 \times 32}{\pi \times 80 \times 10^6}} = 0.06(\text{m}) = 60(\text{mm})$$

选择轴的直径为 60mm。

评注：在杆件的危险截面不能直接判断出来时，应先画出其各内力图，再综合各内力大小得到危险截面的位置。

【例 9】 如图 8-22 所示钢制圆截面折杆 ABC，其横截面直径 $d = 10\text{cm}$，材料的许用应力为

$[\sigma]=135\text{MPa}$,不计杆横截面上剪力影响,试按第三强度理论校核此杆强度。(湖南大学,2001年)

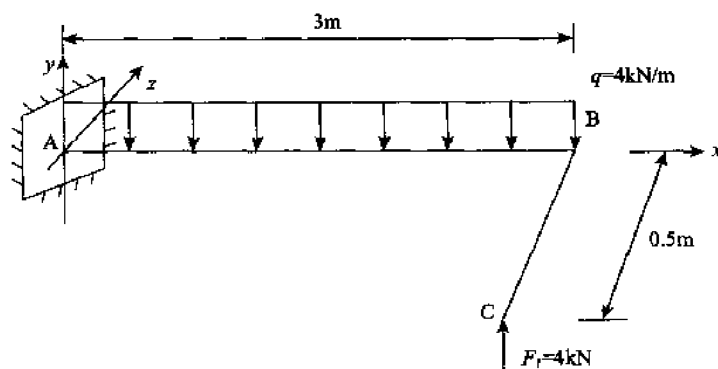


图 8-22

解 将作用力 F_1 向杆轴 AB 简化得到作用在 B 点的力 $F'_1=8\text{kN}$ 和扭矩 $T=8\times0.5=4(\text{kN}\cdot\text{m})$。

令轴 AB 的最大弯矩发生在距 B 点 x 处,由驻值条件,$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=Q=qx-F'_1=4x-8=0$

$x=2\text{m}$

此时 $M(x)=8\times2-\dfrac{1}{2}\times4\times2^2=8(\text{kN}\cdot\text{m})$

由第三强度理论,

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W_z}\cdot\sqrt{M^2+T^2}=\frac{1}{\frac{1}{32}\pi(0.1)^3}\cdot\sqrt{(4\times10^3)^2+(8\times10^3)^2}$$

$$=91\times10^6(\text{Pa})=91(\text{MPa})<[\sigma]=135(\text{MPa})$$

所以此杆的强度满足要求。

评注:只要利用驻值条件正确计算出最大弯矩所在位置,本题便十分简单。

【例 10】 偏心拉伸杆,弹性模量为 E,尺寸及受力如图 8-23 所示,试求:

(1)最大拉应力和最大压应力的位置和数值;

(2)AB 长度的改变量。(北方交通大学,2001 年)

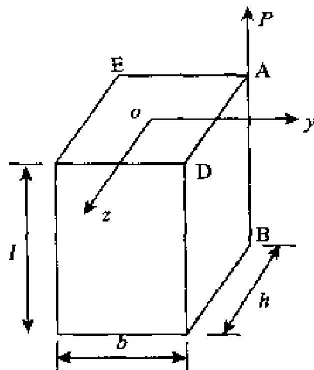


图 8-23

解 (1) 将拉力 P 向形心 O 简化得到经过形心 O 的拉力 $P' = P$，弯矩 $M_Y = P \cdot \frac{h}{2}$，$M_z = P \cdot \frac{b}{2}$。

由拉力 P' 引起的拉应力均匀分布在全截面，大小是：$\sigma_t^0 = \frac{p'}{A} = \frac{p}{bh}$

由弯矩 M_y 引起的最大拉应力发生在 AE 边上，大小是：$\sigma_t^1 = \frac{M_y}{W_y} = \frac{p \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3p}{bh}$

由弯矩 M_y 引起的最大压应力发生在 CD 边上，大小是：$\sigma_c^1 = \frac{M_y}{W_y} = \frac{p \cdot \frac{h}{2}}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{3p}{bh}$

同理，由弯矩 M_z 引起的最大拉应力发生在 AD 边上，大小是 $\sigma_t^2 = \frac{M_z}{W_z} = \frac{P \cdot \frac{b}{2}}{\frac{1}{6}hb^2} = \frac{3P}{bh}$

由弯矩 Mz 引起的最大压应力发生在 CE 边上，大小是 $\sigma_c^2 = \frac{Mz}{Wz} = \frac{p \cdot \frac{b}{2}}{\frac{1}{6}hb^2} = \frac{3P}{bh}$

综合以上，最大拉应力发生在 A 点，大小是 $\sigma_t^0 + \sigma_t^1 + \sigma_t^2 = \frac{P}{bh} + \frac{3P}{bh} + \frac{3P}{bh} = 7 \cdot \frac{P}{bh}$；最大压应力发生在 C 点，大小是 $-\sigma_t^0 + \sigma_c^1 + \sigma_c^2 = -\frac{P}{bh} + \frac{3P}{bh} + \frac{3P}{bh} = 5 \cdot \frac{P}{bh}$。

(2) 由(1)问容易得到 AB 边上的线应变是：$\epsilon_{AB} = \frac{7 \cdot \frac{P}{bh}}{E} = \frac{7P}{Ebh}$

于是，AB 长度的改变值是：$\Delta l_{AB} = l \cdot \epsilon_{AB} = \frac{7Pl}{Ebh}$

评注：对于矩形截面的偏心力作用题，读者在解题时可以直接判断最大应力作用点位置。

【例 11】 如图 8-24 所示一矩形截面铸铁注承受偏心 压力 P 作用。P 力作用点可以在柱顶

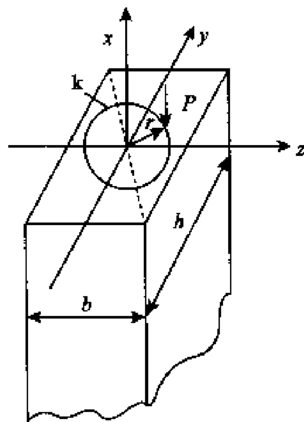


图 8-24

面上以形心 O 点为圆心，r 为半径的圆周上移动。柱的承载能力由抗拉强度控制。材料的许用拉应力是$[\sigma]_+ = 300\text{MPa}, b = 150\text{mm}, h = 200\text{mm}, r = 80\text{mm}$。

求：(1) 当 P 力作用在 K 点时，此柱的许用载荷$[P]$值；

(2) 当 P 力作用在圆周上何处时，柱的许用载荷为最小？其值$[P]_{\min}=$？

(3) 当 P 力作用在圆周上何处时，柱的许用载荷为最大？其值$[P]_{\max}=$？(同济大学，2001年)

解 (1)当压力作用在 K 点时，将压力 P 简化至形心位置 O 得到轴力 $N=P$，弯矩 $M_y = P \cdot z_K = -0.048 \cdot P$，弯矩 $M_z = -P \cdot y_K = -0.064P$ 最大拉应力发生在 C 点。

由轴力 $N=P$ 在 C 点引起的压应力是：$\sigma_c^0 = -\dfrac{N}{A} = -\dfrac{P}{bh} = -\dfrac{P}{0.15 \times 0.2} = -33.3\text{P}$

由弯矩 My 在 C 点引起的拉应力是：$\sigma_l^1 = -\dfrac{M_y}{W_y} = -\dfrac{-0.048P}{\frac{1}{6} \times 0.2 \times 0.15^2} = \dfrac{0.048P}{\frac{1}{6} \times 0.2 \times 0.15^2} = 64\text{P}$

由弯矩 M_z 在 C 点引起的拉应力是：

$$\sigma_l^2 = -\frac{M_z}{W_z} = -\frac{-0.064P}{\frac{1}{6} \times 0.15 \times 0.2^2} = \frac{0.064P}{\frac{1}{6} \times 0.15 \times 0.2^2} = 64\text{P}$$

所以 C 点的拉应力是：

$$\sigma_c = \sigma_c^0 + \sigma_l^1 + \sigma_l^2 = -33.3P + 64P + 64P = 94.7P \leqslant [\sigma]_+ = 30 \times 10^6 (\text{Pa})$$

$P \leqslant 317000(\text{N}) = 317(\text{kN})$

即此柱的许可载荷是$[P] = 317\text{kN}$

(2)当 P 力作用在圆周上，其截面如图 8-25 所示，

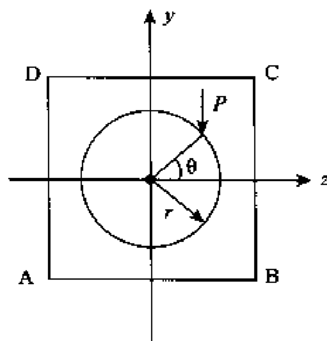


图 8-25

由对称性只考虑 P 力作用在第一象限的情况。此时，$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，且最大拉应力发生在 A 点，表示如下：

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{M_y}{M_y} - \frac{M_z}{W_z} = \frac{-P}{0.15 \times 0.2} + \frac{Pr\cos\theta}{\frac{1}{6} \times 0.2 \times 0.15^2} - \frac{-Pr\sin\theta}{\frac{1}{6} \times 0.15 \times 0.2^2}$$

$$= P \cdot [-33.3 + 1333r\cos\theta + 1000r\sin\theta]$$

当 σ_A 取最大值时，由驻值条件

$$\frac{\partial\sigma_A}{\partial\theta} = P \cdot [-1333r\sin\theta + 1000r\cos\theta] = 0$$

$\theta = \tan^{-1}(0.75) = 37°$，且此时$\frac{\partial^2\sigma_A}{\partial\theta^2} = P \cdot [-1333r\cos\theta - 1000r\sin\theta] < 0$，满足极大值条件。

此时 $\sigma_A = P \cdot [-33.3 + 1333 \times 0.08 \times \frac{4}{5} + 1000 \times 0.08 \times \frac{3}{5}]$

$= 100P \leqslant [\sigma]_+ = 30 \times 10^6(\mathrm{Pa})$

$P \leqslant 30 \times 10^4(\mathrm{N}) = 300(\mathrm{kN})$

即$[P]_{min} = 300\mathrm{kN}$

(3) $\begin{cases} 当\ \theta = 0°\ 时，\sigma_B = P \cdot [-33.3 + 1333 \times 0.08] = 73P \\ 当\ \theta = 90°\ 时，\sigma_B = P \cdot [-33.3 + 1000 \times 0.08] = 46.7P \end{cases}$

比较 θ=0°，37°，90°时 σ_B 值的大小得到 σ_B 的最小值是：

$$\sigma_B = 46.7P \leqslant [\sigma]_+ = 30 \times 10^6(\mathrm{Pa})$$

$$P \leqslant 642 \times 10^3(\mathrm{N}) = 642\mathrm{kN}$$

即 $[P]_{max} = 642\mathrm{kN}$

评注：本题立意新颖，但只要读者能够正确建立最大应力值和 P 力作用点位置（的函数关系，问题便是一个简单的极值问题。

【例 12】 试求如图 8-26 所示梁中的最大应力。（中南大学，2001 年）

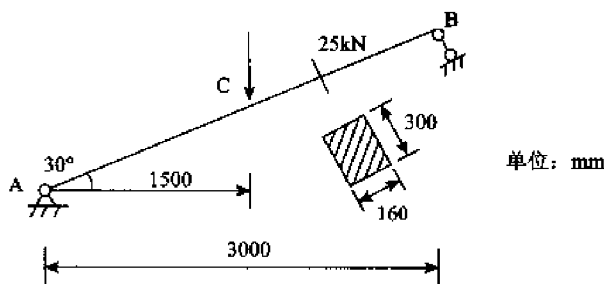


图 8-26

解 将外力分解成 P_x、P_y 如图 8-27 所示。

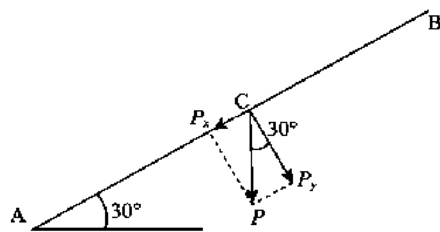


图 8-27

其中：

$\begin{cases} P_x = P\sin\alpha = 25 \times \sin30° = 12.5\mathrm{kN} \\ P_y = P\cos\alpha = 25 \times \cos30° = 21.6\mathrm{kN} \end{cases}$

AB 梁发生压弯组合变形，作受力图如图 8-28(a)、(b)所示。

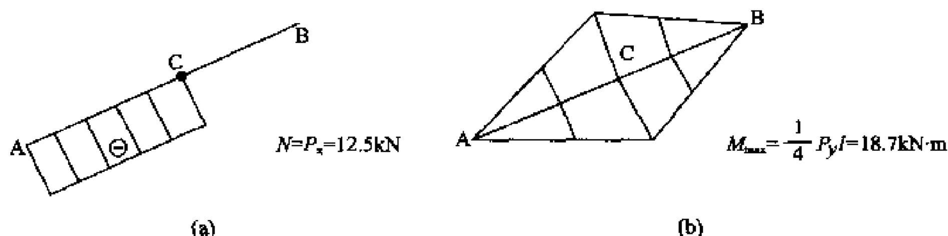


图 8-28

由轴力在梁的 AC 段中形成的压应力是：$\sigma_1 = -\dfrac{N}{A} = -\dfrac{12.5\times10^3}{0.16\times0.3} = -0.26(\text{MPa})$

由弯矩在梁 AB 中形成的最大压应力是：$\sigma_2 = -\dfrac{M_{max}}{W_z} = -\dfrac{18.7\times10^3}{\frac{1}{6}\times0.16\times0.3^2} = -7.8(\text{MPa})$

那么，梁中的最大压应力发生在 C 点左截面上边缘，其值为：

$[\sigma_{max}]_c = \sigma_1 + \sigma_2 = -0.26 - 7.8 = -8.05(\text{MPa})$

$[\sigma_{max}]_t = 0 + \sigma_2 = 0 + 7.8 = 7.8(\text{MPa})$

评注：在外力作用的 C 处，左端面上有最大弯矩和轴力，因面是危险截面，上面有最大压应力。

【例 13】 钢制曲拐 ABC 安置在水平面内，AB 和 BC 垂直，如图 8-29 所示。其 A 端固定，C 端挂有钢丝绳，绳长 S=2.1m，截面积 A=0.1cm²，其下连接吊盘 D，重量 Q=100N 的重物放在吊盘上。已知 a=40cm，l=1m，b=1.5cm，h=2cm，d=4cm，钢的 E=210GPa，G=82GPa，$[\sigma]$=160MPa。不计曲拐、吊盘、钢丝绳自重。

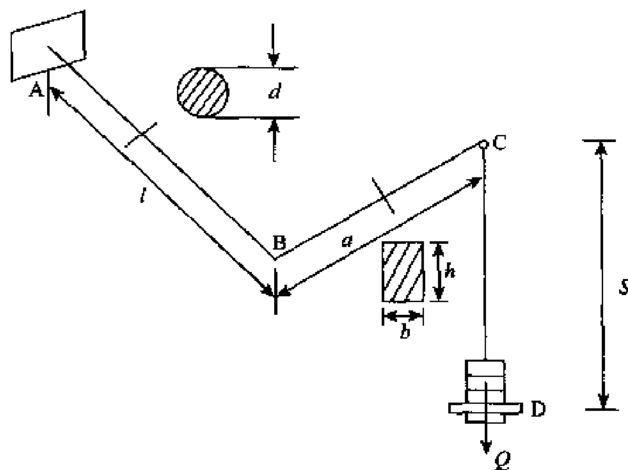


图 8-29

(1)找到 AB 段的危险截面和危险点位置，并画出应力状态，注明应力大小和方向；

(2)用第四强度理论校核曲拐 AB 段强度；

(3)求曲拐 C 端及钢丝 D 端竖直方向位移。（上海交通大学，2000 年）

解 (1)AB 段中，A 截面的弯矩和扭矩具有最大值，是危险截面。

其弯矩是：$M_A = Ql = 100\times1 = 100(\text{N}\cdot\text{m})$

其扭矩是：$T_A = Qa = 100\times0.4 = 40(\text{N}\cdot\text{m})$

其危险点为表面最高点和最低点，应力状态分别如图 8-30(a)、(b)所示，应力大小是：

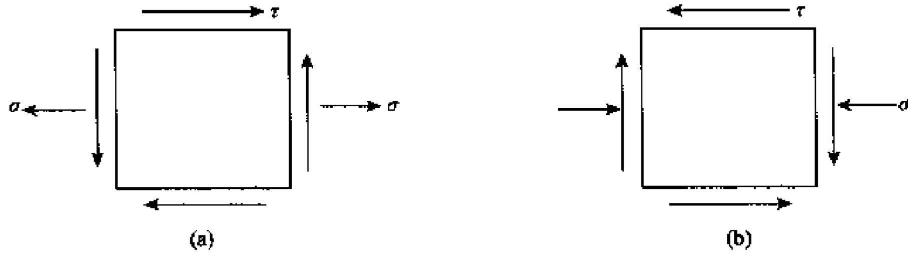


图 8-30

$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{M_A}{W_z} = \dfrac{100}{\dfrac{1}{32}\times\pi\times(0.04)^3} = 15.9(\text{MPa}) \\ \tau = \dfrac{T_A}{W_P} = \dfrac{40}{\dfrac{1}{16}\times\pi\times(0.04)^3} = 3.2(\text{MPa}) \end{cases}$$

(2)由第四强度理论，

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2+3\tau^2} = \sqrt{(15.9)^2+3\times(3.2)^2} = 16.8(\text{MPa}) < [\sigma] = 160(\text{MPa})$$

AB 段的强度满足要求。

(3)将作用在 C 点的力 Q 简化到 B 点，得到作用力 $Q'=Q$ 和扭矩 $T=Qa$ 如图 8-31 所示，

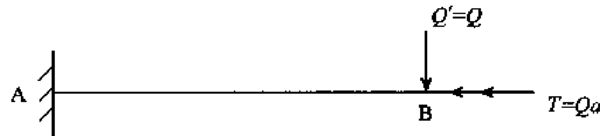


图 8-31

则 B 点的挠度和扭转角是：

$$f_B = \frac{Q'l^3}{3EI} = \frac{Ql^3}{3EI}(\text{垂直向下})$$

$$\theta_B = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{Qa\cdot l}{GI_p}(\text{沿顺时针方向})$$

由 B 点位移引起的 C 点挠度是：$f_{c1} = f_B + \theta_B\cdot a = \dfrac{Ql^3}{3EI} + \dfrac{Qa^2l}{GI_P}$(垂直向下)

由作用力仅引起的 C 点挠度是：$f_{c2} = \dfrac{Qa^3}{3EI}$，(垂直向下)

所以 C 点的挠度是：

$$f_c = f_{c1} + f_{c2} = \frac{Ql^3}{3EI} + \frac{Qa^2l}{GI_p} + \frac{Qa^3}{3EI}$$

$$= \frac{100\times1^3}{3\times210\times10^9\times\dfrac{1}{64}\times\pi\times(0.04)^4} + \frac{100\times0.4^2\times1}{82\times10^9\times\dfrac{1}{32}\times\pi\times(0.04)^4}$$

$$+ \frac{100\times(0.4)^3}{3\times210\times10^9\times\dfrac{1}{12}\times0.015\times(0.02)^3} = 0.3(\text{cm})$$

D 点的竖直位移由 C 点挠度和钢丝伸长两部分组成，即

$$f_D = f_C + \frac{QS}{EA} = 3.0\times10^{-3} + \frac{100\times2.1}{210\times10^9\times0.1\times10^{-4}} = 0.31(\text{cm})$$

评注：曲拐的组合变形计算在考研习题中非常常见，其中 C 点位移还可以使用卡氏定理方法和单位力法来求解。

【例 14】 一压缩气体的贮罐(容器)用钢索捆着，水平起吊如图 8-32 所示，容器的长度是 4cm，直径为 1m，壁厚为 6mm，容器内气体的气压是 0.36MPa，假定容器自重包括被压缩气体的重量是每米 1500N，试求 A、B 两点处的主应力，并画出单元体的受力图。(中南大学，2001 年)

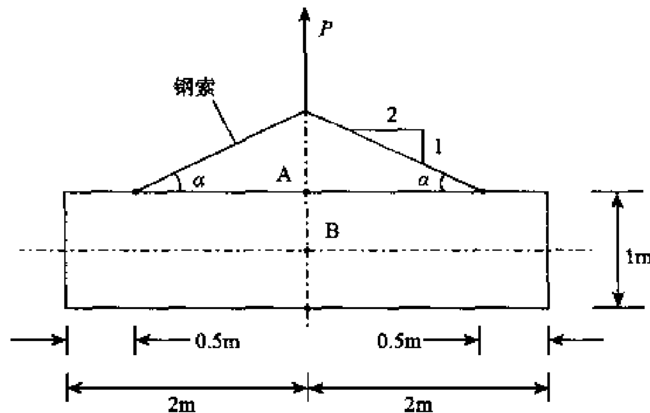


图 8-32

解　容器单位长度内的重量是 $q=1500\text{N/M}$

总重量是：$P=1500\times4=6000\text{N}$

钢索张力是：$T = \frac{P}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}P$

轴力是：$N = \frac{P}{2\tan\alpha} = P = 6000(\text{N})$

其中，$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \tan\alpha = \frac{1}{2}$

AB 截面的弯矩是：$M = \frac{P}{2}\times(2-0.5) - \frac{1}{2}q\times2^2 + N\times0.5 = \frac{3}{4}P = \frac{3}{4}\times6000 = 4500$ $(\text{N}\cdot\text{m})$

A、B 两点的环向应力是：$\sigma_1 = \frac{PD}{2t} = \frac{0.36\times10^6\times1}{2\times6\times10^{-3}} = 30\ (\text{MPa})$

A 点的纵向应力是：

$$\sigma_2 = \frac{PD}{4t} - \frac{N}{A} - \frac{M}{W_z} = \frac{0.36\times10^6\times1}{4\times6\times10^{-3}} - \frac{6000}{\frac{1}{4}\times\pi\times(1^2-0.994^2)} - \frac{4500}{\frac{1}{32}\times\pi\times1^3\times[1-(\frac{0.994}{1})^4]}$$

$=13.7(\text{MPa})$

B 点的纵向应力是：

$$\sigma_2 = \frac{PD}{4t} - \frac{N}{A} = \frac{0.36\times10^6\times1}{4\times6\times10^{-3}} - \frac{6000}{\frac{1}{4}\times\pi\times(1^2-0.994^2)} = 14.7\ (\text{MPa})$$

A、B 两点的单元体应力状态分别如图 8-33(a)、(b)所示。

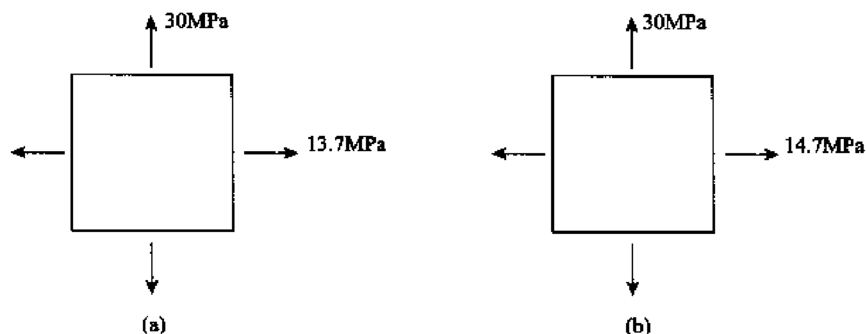


图 8-33

评注:起吊的容器发生压弯组合变形,同时容器的内部气体压强也会引起容器产生环向和纵向应力,容器的真实应力是两部分的应力叠加。

【例 15】 简支梁中点受横向集中力 P 点作用,梁截面尺寸如图 8-34 所示,计算梁上最大拉、压应力,并指出所在位置。(同济大学,2000 年)

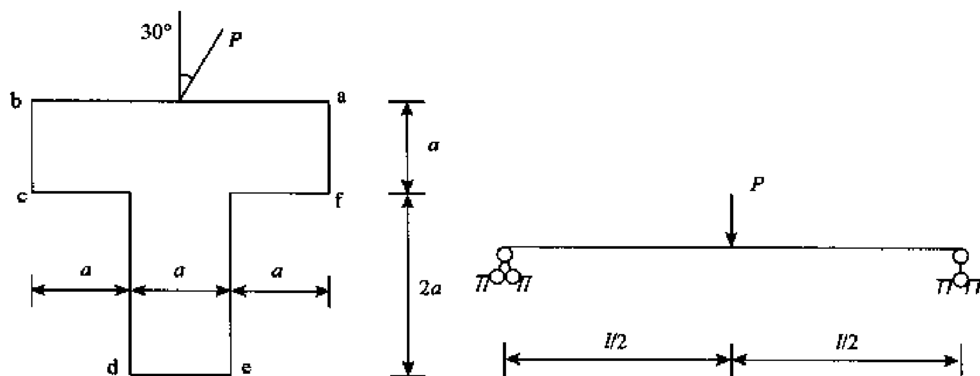


图 8-34

解 设截面形心距离 T 形梁顶缘 S 如图 8-35 所示:

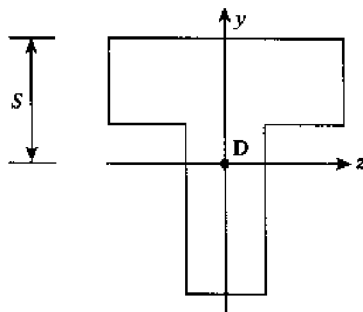


图 8-35

则由组合图形形心公式:$S=\dfrac{3a\cdot a\cdot 0.5a+a\cdot 2a\cdot 2a}{3a\cdot a+a\cdot 2a}=1.1a$

截面对形心轴的惯性矩是:

$$I_y=\frac{1}{12}a\cdot(3a)^3+\frac{1}{12}\cdot 2a\cdot a^3=2.4a^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 3a \cdot a^3 + 3a \cdot a \cdot (0.6a)^2 + \frac{1}{12} \cdot a \cdot (2a)^3 + a \cdot 2a \cdot (0.9a)^3 = 3.62a^4$$

将 P 力分解成 $P_y = p\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}P, P_z = P\sin 30^\circ = \frac{1}{2}P$，

梁的弯曲可以视为在 P_y 作用下沿平面 xy 的弯曲和在 P_z 作用下沿平面 xz 的弯曲两部分的叠加，最大拉应力发生在 d 点，即

$$\sigma_{tmax} = \frac{M_y}{I_y} \cdot 1.9a + \frac{M_z}{I_z} \cdot 0.5a = \frac{\frac{1}{4}P_y l}{2.4a^4} \cdot 1.9a + \frac{\frac{1}{4}P_z l}{3.62a^4} \cdot 0.5a$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}P \cdot l}{2.4a^4} \cdot 1.9a + \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}P \cdot l}{3.62a^4} \cdot 0.5a = \frac{0.18Pl}{a^3}$$

最大压应力发生在 a 点，即

$$\sigma_{cmax} = \frac{M_y}{I_y} \cdot 1.1a + \frac{M_z}{I_z} \cdot 1.5a = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}Pl}{2.4a^4} \cdot 1.1a + \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}P \cdot l}{3.62a^4} \cdot 1.5a = \frac{0.151Pl}{a^3}$$

评注：对组合变形的计算应将其分解成单一变形的叠加。

【例 16】 如图 8-36 所示某矩形截面杆受轴向偏心集中力 P 作用。用电阻应变片在杆侧面点 A 处测得与杆轴线呈 $\alpha = 45^\circ$ 方向的线应变 $\varepsilon_\alpha = -80 \times 10^{-6}$。已知偏心集中力 $P = 2100\text{kN}$，杆的弹性模量 $E = 40\text{GPa}$，泊松比 $\mu = 0.3$，矩形截面尺寸 $h = 45\text{cm}, b = 30\text{cm}$，试求集中力 P 对截面形心的偏心距 e。(武汉大学，2003 年)

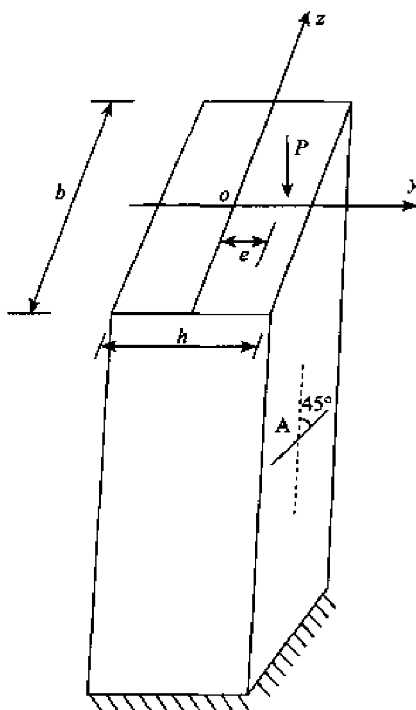


图 8-36

解 将偏心力 P 简化到截面中心 O 点，则有轴压力 $N = P$ 和绕 z 轴的弯矩 $M_z = Pe$，A 点

处于单向压缩应力状态，其压应力是：

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{P}{bh} - \frac{Pe}{\frac{bh^2}{6}}$$

对 A 点，由广义胡克定律，

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \sigma_z) = \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \sigma_x) = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \end{cases}$$

由斜截面上的线应变公式，

$$\varepsilon_{-45^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2} \cdot \cos[2 \times (-45^\circ)] - \frac{\gamma_{xz}}{2} \cdot \sin[2 \times (-45^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot (1-\mu) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{40 \times 10^9} \cdot (1-0.3) = \frac{0.35 \cdot \sigma}{40 \times 10^9} = -80 \times 10^6$$

解出 $\sigma = -9.14 \times 10^6 (\mathrm{Pa}) = -9.14 (\mathrm{MPa})$

将其代入式 A 点压应力表达式，有

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{2100 \times 10^3}{45 \times 10^{-2} \times 30 \times 10^{-2}} - \frac{2100 \times 10^3 \cdot \rho}{45 \times 10^{-2} \times 30 \times 10^{-2}} = -9.14 \times 10^6$$

解出 $e = 0.143\mathrm{m}$

评注：柱受偏心压缩载荷时，只要载荷处于截面核心以内，其内任一点处于单轴受压应力状态。

第三节 习 题

一、填空题

利用叠加法求杆件组合变形的条件是：________和________。

二、选择题

1. 偏心拉伸（压缩）实质上是________的组合变形。
   A. 两个平面弯曲
   B. 轴向拉伸（压缩）与平面弯曲
   C. 轴向拉伸（压缩）与剪切
   D. 平面弯曲与扭转
2. 梁的正应力公式是在“平面弯曲”前提下推导得到的，“平面弯曲”即________。
   A. 梁在平面力系作用下产生的弯曲
   B. 梁的内力只有弯矩没有剪力的弯曲
   C. 梁的横截面变形后仍为平面的弯曲

D. 梁的轴线弯曲变形后仍为(受力平面内)平面曲线的弯曲

3. 根据杆件横截面正应力分析过程，中性轴在什么情形下才会通过截面形心？关于这一问题，有以下四种答案，试分析哪一种是正确的________。

A. $M_y=0$ 或 $M_z=0$，$F_{Nx}\neq0$

B. $M_y=M_z=0$，$F_{Nx}\neq0$

C. $M_y=0$，$M_z\neq0$，$F_{Nx}\neq0$

D. $M_y\neq0$ 或 $M_z\neq0$，$F_{Nx}=0$

4. 关于斜弯曲的主要特征有以下四种答案，试判断哪一种是正确的________。

A. $M_y\neq0$，$M_z\neq0$，$F_{Nx}\neq0$，中性轴与截面形心主轴不一致，且不通过截面形心

B. $M_y\neq0$，$M_z\neq0$，$F_{Nx}=0$，中性轴与截面形心主轴不一致，但通过截面形心

C. $M_y\neq0$，$M_z\neq0$，$F_{Nx}=0$，中性轴与截面形心主轴平行，但不通过截面形心

D. $M_y\neq0$，$M_z\neq0$，$F_{Nx}\neq0$，中性轴与截面形心主轴平行，但不通过截面形心

5. 四种不同截面的悬臂梁，在自由端承受集中力，其作用方向如图 8-37 所示，图中 O 为弯曲中心。关于哪几种情形下，只弯不扭，可以直接应用正应力公式，有以下四种结论，试判断哪一种是正确的________。

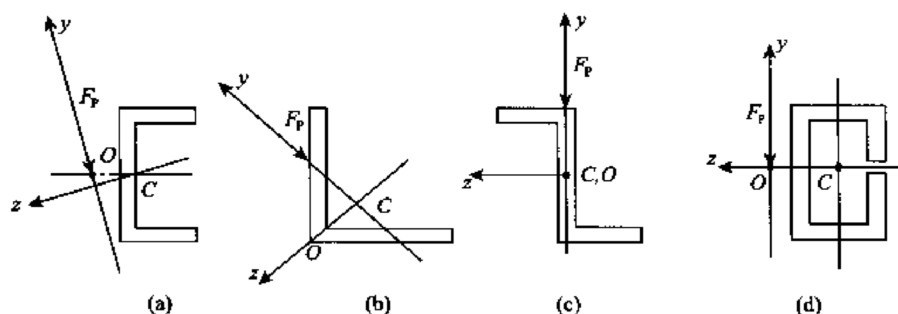


图 8-37

A. 仅(a)、(b)可以　　　　B. 仅(b)、(c)可以

C. 除(c)之外都可以　　　　D. 除(d)之外都不可以

6. 杆件在________变形时，其危险点的应力状态为如图 8-38 所示状态________。

A. 斜弯曲　　　　B. 偏心拉伸

C. 拉弯组合　　　　D. 弯扭组合

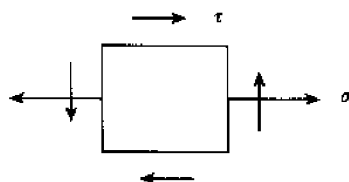


图 8-38

7. 如图 8-39 所示四个单元体中的哪一个是图示拐轴点 a 的初应力状态________。

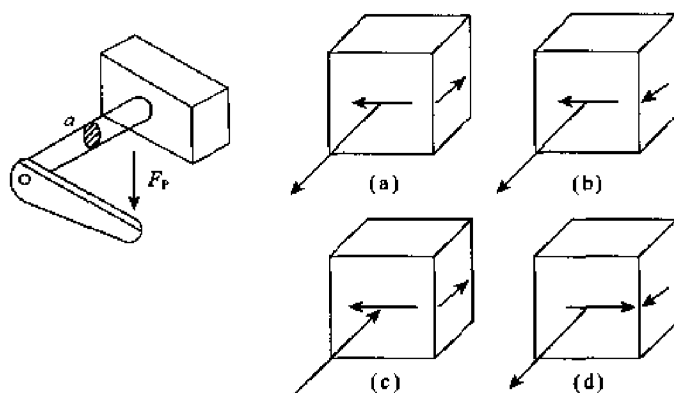


图 8-39

8. 焊件内力情况如图 8-40 所示，欲用第三强度理论对 A、B、C、D 四个截面进行校验，现有如下三个公式：

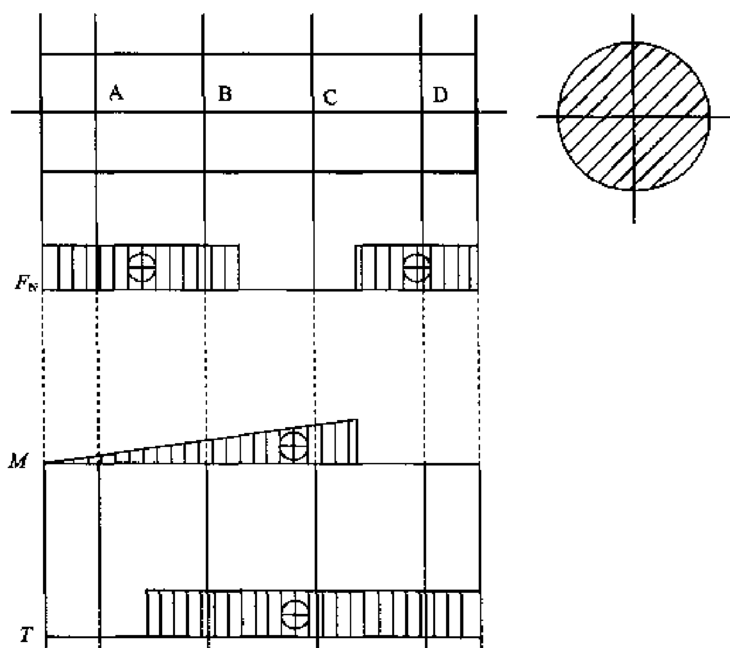


图 8-40

$$(a)\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3;(b)\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2};(c)\sigma_{r3}=\frac{1}{W_z}\sqrt{M^2+T^2}。$$

式中 σ_1、σ_3 为危险点主应力，σ、τ 为危险点处横截面上的应力，M、T 为危险点处横截面上的弯矩和扭矩。

下述表达，哪一项正确？________。

A. A、B、C、D 四个截面的相当应力用(a)、(b)、(c)表达均可以

B. 对四个截面都适用的相当应力公式只有(a)

C. 三个表达式中没有一个适用于全部四个截面

D. (a)、(b)两式对全部四个截面都适用

三、判断题

1. 在各种受力情况下，脆性材料都将发生脆性断裂而破坏。(　　)

2. 实心圆和空心圆的截面核心均是空心圆。(　　)

四、计算题

1. 如图 8-41 所示圆截面悬臂梁，直径 $d = 130\text{mm}$，弹性模量 E = 10GPa。在梁的水平对称面内受到 $P_1 = 1.6\text{kN}$ 的作用，在竖直对称面内受到 $P_2 = 0.8\text{kN}$ 的作用。试求：

(1)梁的横截面上的最大正应力；(2)梁的最大挠度。

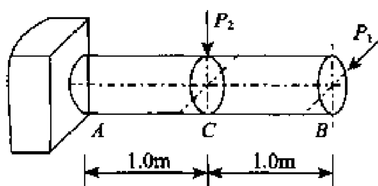


图 8-40

2. 如图 8-42 所示，飞机起落架的折轴为管状截面，内径 $d=70\text{mm}$，外径 $D=80\text{mm}$，材料的许用应力$[\sigma] = 100\text{MPa}$，试按第三强度理论校核折轴的强度，若 $P=1\text{kN}$，$Q=4\text{kN}$。

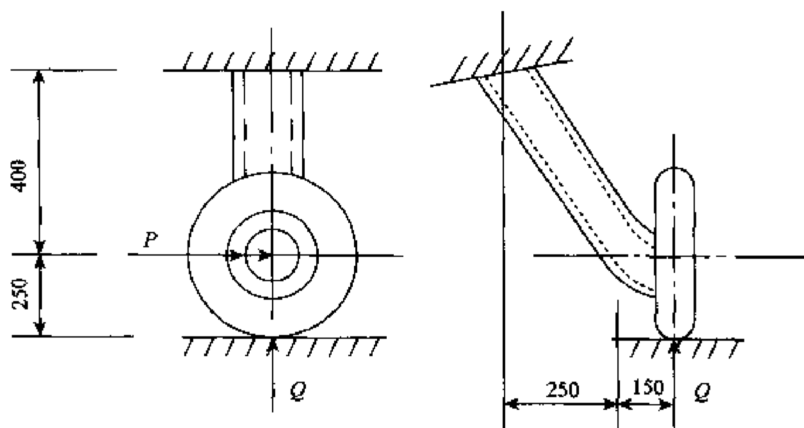


图 8-42

3. 通过电测应变确定圆轴的工作荷载 P。如图 8-43 所示，P 力作用在垂直轴线的平面内，与圆周切线成 $\alpha = 30°$。轴的直径 $D=10\text{cm}$，E=210GPa，$\mu = 0.3$。试在轴的表面上标出贴应变片(只限一片)的位置和方向，写出 P 力的算式，并求当所测应变 $\varepsilon = 3\times10^{-6}$时 P 的大小。

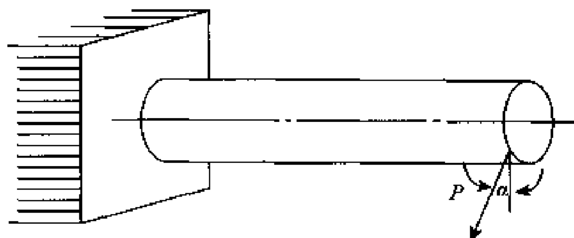


图 8-43

第 9 章　能量方法

知识要点

本章主要介绍了能量方法的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)杆件的变形能；

(2)功的互等；

(3)卡氏定理；

(4)虚功原理；

(5)单位荷载法以及莫尔积分。

第一节　本章内容总结

1. 变形功与变形能

如图 9-1 所示，弹性杆受拉力 P 作用，当 P 从零开始到终值 P_1 缓慢加载时，力 P 在其作用方向上的相应位移也由零增至 Δl_1 而做功，称为变形功。

$$W=\int_0^{\Delta l}P\mathrm{d}\Delta$$

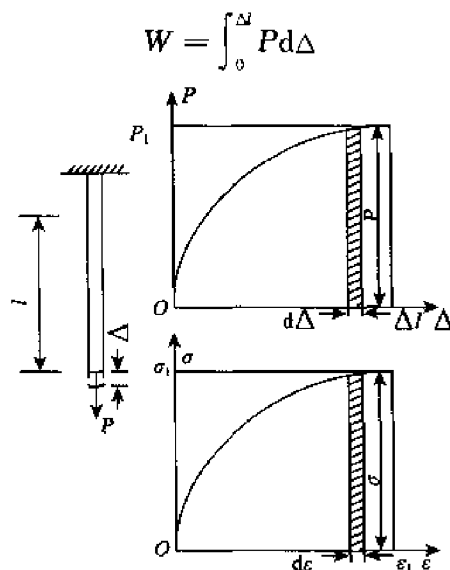


图 9-1

与此同时弹性杆被拉长 Δl_1 而具有做功的能力，表明杆件内储存了变形能。

单位体积储存的应变能称为应变比能：$u=\int_0^{\varepsilon_1}\sigma\mathrm{d}\varepsilon$

整个杆件的变形能为：$U=\int u\mathrm{d}V$

如果略去拉伸过程中的动能及其他能量的变化与损失，由能量守恒原理，杆件的变形能 U 在数值上应等于外力做的功 W，即有

$U = W$

这一对变形体都适用的普遍原理称为功能原理，弹性固体变形是可逆的，即当外力解除后，弹性体将恢复其原来形状，释放出变形能而做功。

但当超出了弹性范围，具有塑性变形的固体，变形能不能全部转变为功，因为变形体产生塑性变形时要消耗一部分能量，留下残余变形。

2. 余应变比能与卡氏定理

变形体受外力作用时的余功定义为：$W_c = \int_0^{P_1} \Delta \mathrm{d}P$

其中 P_1 是外力从零增加到的终值，仿照功与变形能相等的关系，将余功相应的能称为余能，用 U_c 表示。余功与余能相等，即：

$$U_c = W_c = \int_0^{P_1} \Delta \mathrm{d}P$$

定义单位体积余应变能（或应变余能），称为余应变比能：$u_c = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon \mathrm{d}\sigma$

由此整个结构余应变能可写成：$U_c = \int u_c \mathrm{d}V$

应指出：余功、余应变能、余应变比能具有功的量纲，是变形体的另一能量参数，但都没有具体的物理概念，只是常力所做的功减去变力所做功余下的那部分功。

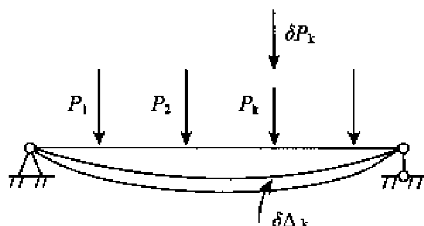


图 9-2

如图 9-2 所示，P_k 增加微量 δP_k，则有

$$\delta W_c = \int_{P_k}^{P_k+\delta P_k} \delta \mathrm{d}p = \Delta_k \delta P_k$$

又 $U_c = U_c(P_1, P_2, L, P_n)$，　　$\delta U_c = \dfrac{\partial U_c}{\partial P_k} \delta P_k$

由 $\delta W_c = \delta U_c \Rightarrow \Delta_k = \dfrac{\partial U_c}{\partial P_k}$　　(Crotti－Engesser 定理)

对于线弹性体，$U = U_c$

$\Delta_k = \dfrac{\partial U}{\partial P_k}$　（卡氏第一定理）

3. 能量原理

固体力学中运用功与能有关的基本原理统称为能量原理，由此发展出来的方法称为能

量法。

能量原理是在总体上从功与能的角度考察变形体系统的受力、应力与变形的原理与方法，是进一步学习固体力学的基础，也是当今应用甚广的有限元法求解力学问题的重要基础。

4. 杆件不同受力情况下的变形能

1）轴向拉伸或压缩线弹性杆件

拉、压杆应变比能：$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$ 或 $\frac{1}{2}E\varepsilon^2$

则整个杆的变形能：$U = \int_V u\mathrm{d}V = \int_0^l\int_A \frac{\sigma^2}{2E}\mathrm{d}A\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{N^2(x)}{2EA}\mathrm{d}x$

其中 $\sigma = \frac{N}{A}$，N 是内力（轴力），A 是截面面积，l 是杆长。

对于等截面杆，内力 $N = P =$ 常数，线弹性范围内拉压杆的变形能：

$U = W = \frac{1}{2}P\Delta l$ 而杆的伸长（或缩短）为：

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}$$

上式可改写成：

$$U = W = \frac{1}{2}\frac{P^2 l}{EA}$$

2）纯剪，扭转线弹性杆件

线弹性材料纯剪应力状态杆件的应变比能为：

$$u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

扭转杆的变形能：

$$U = \int u\mathrm{d}V = \int_0^l\int_A \frac{\tau^2}{2G}\mathrm{d}A\mathrm{d}x = \int_0^l\int_A \frac{T^2\rho^2}{2GI_P^2}\mathrm{d}A\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{T^2(x)}{2GI_P}\mathrm{d}x$$

其中 $I_P = \int_A \rho^2\mathrm{d}A$，$T(x)$ 是截面上的扭矩（内力）。

对于受扭转力偶矩 m 作用的等截面圆杆，如果杆件材料是纯弹性的，则其扭转角为：

$$\varphi = \frac{ml}{GI_P}$$

扭转力偶矩 m 所作的功为：$W = \frac{1}{2}m\varphi = \frac{m^2 l}{2GI_P}$

故而扭转变形能为：$U = W = \frac{1}{2}m\varphi = \frac{m^2 l}{2GI_P}$

3）线弹性梁弯曲

弹性弯曲杆的应变比能：$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M^2(x)y^2}{2EI^2}$

整个杆的变形能：$U = \int u\mathrm{d}V = \int_0^l\left[\frac{M^2(x)}{EI^2}\int_A y^2\mathrm{d}A\right]\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$

其中 $I=\int_A y^2\mathrm{d}A$，$M(x)$ 是梁截面的弯矩（内力矩）。

对于弹性纯弯曲梁，其两端受弯曲力偶矩 m 作用，m 由零开始逐渐增加到最终值，则两端截面的相对转角为 θ，则弯曲力偶矩所做的功为：

$$W=\frac{1}{2}m\theta,\theta=\frac{ml}{\mathrm{EI}}$$

所以杆的应变能为：$U=W=\frac{1}{2}m\theta=\frac{1}{2}\frac{m^2l}{\mathrm{EI}}$

对于纯弯曲梁 $M(x)=m=$ 常数

4）广义力与广义位移

对于拉压杆、扭转杆、弯曲杆的变形能可统一写成：$U=W=\frac{1}{2}P\delta$

式中 P 在拉伸时代表拉力，扭转时代表扭转力偶矩，弯曲时代表弯曲力偶矩，P 称为广义力，而与之相应的位移 δ，称为广义位移，如拉伸时它是与 P 相应的线位移 Δl；扭转时，它是与扭转力偶矩相应的角位移 φ；弯曲时，它是与弯曲力偶矩相应的截面角位移 θ。更一般地说，广义力矢量与相应广义位移矢量的点积等于功。

5）非线性弹性材料的构件的变形功、变形能

对于非线性弹性材料的构件，$U=W=\frac{1}{2}P\delta$ 式仍成立，变形能与应变比能为：

$$U=W=\int_0^{\Delta_1}P\mathrm{d}\Delta\ ,u=\int_0^{\varepsilon_1}\sigma\mathrm{d}\varepsilon$$

$$U_1=\int\frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2\mathrm{EI}},U_2=\int\frac{kQ^2(x)\mathrm{d}x}{2\mathrm{GA}}$$

横力弯曲总应变能：

$$U=U_1+U_2=\int\frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2\mathrm{EI}}+\int\frac{kQ^2(x)\mathrm{d}x}{2\mathrm{GA}}$$

对于矩形截面梁无量纲参数 k 为：

$$k=\frac{A}{\mathrm{I}^2}\int_A\frac{(s_z^*)^2}{b^2}=\mathrm{d}A=\frac{144}{bh^5}\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)b\mathrm{d}y=\frac{6}{5}$$

对其他截面形状，同理可求得相应的 k，例如圆形截面 $k=\frac{10}{9}$，圆管截面梁 $k=2$。

5. 变形体虚功原理

虚位移：满足变形协调条件与位移边界条件的小变形可以是真实位移，也可以是虚拟位移，可以是该点作用力产生，也可以是其他点作用的力产生。

$$W_e=W_i$$

虚功（虚位移）原理：外力在虚位移上所作的外虚功 W_e，恒等于内力在虚变形上所作的内虚功。

虚功原理适用线弹性体、非线性弹性体、非弹性体。任意杆件虚功计算公式为：

$$\delta W_{变形}=N\mathrm{d}\delta^*+Q\mathrm{d}\lambda^*+M\mathrm{d}\theta^*+T\mathrm{d}\varphi^*$$

具体含义如图 9-3 所示

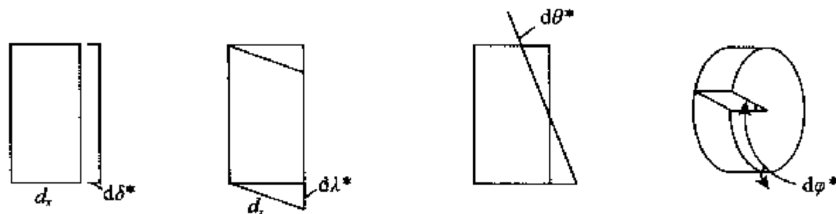


图 9-3

$$W_i = \int_l N\mathrm{d}\delta^* + \int_l Q\mathrm{d}\lambda^* + \int_l M\mathrm{d}\theta^* + \int_l T\mathrm{d}\varphi^*$$

6. 单位载荷法以及莫尔积分

(1) 单位载荷法：利用变形体的虚功原理，建立一种计算结构上某一点某方向上位移的一般方法，即为单位载荷法。

实际载荷引起的变形 $\mathrm{d}\delta,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}\lambda$，作为虚变形，待求点位移(广义)$\Delta$ 是实际载荷的真实位移，是单位力的虚位移。

设想单位力引起内力 $\overline{N}(x),\overline{M}(x),\overline{T}(x),\overline{Q}(x)$。

对于线弹性与非线性弹性体：

$W_{外} = W_{内}$

$$\Delta \cdot l = \int_l \overline{N}(x)\mathrm{d}\delta + \int_l \overline{T}(x)\mathrm{d}\varphi + \int_l \overline{M}_y(x)\mathrm{d}\theta_y + \int_l \overline{M}_z(x)\mathrm{d}\theta_z$$

对于弹性体

$$\mathrm{d}\delta = \frac{N(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{EA}} \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{T(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{GI_p}}$$

$$\mathrm{d}\theta_y = \frac{M_y(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{EI_y}} \qquad \mathrm{d}\theta_z = \frac{M_z(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{EI_z}}$$

可得：

$$\Delta = \int_l \frac{\overline{N}(x)N(x)}{\mathrm{EA}}\mathrm{d}x + \int_l \frac{\overline{T}(x)T(x)}{\mathrm{GI_p}}\mathrm{d}x + \int_l \frac{\overline{M}_y(x)M_y(x)}{\mathrm{EI_y}}\mathrm{d}x + \int_l \frac{\overline{M}_z(x)M_z(x)}{\mathrm{EI_z}}\mathrm{d}x$$

(2) 莫尔(Mohr) 积分

设一线弹性系统，受到一组广义载荷 $F_1,F_2,\cdots,F_i,\cdots,F_n$ 作用面发生变形，其内力为 $N(x),M(x),M_n(x)$。若要求任一点 i 沿任一方向的广义位移 Δ_i，可在 i 点 Δ_i 方向加一广义单位力 $F^0=1$，其相应的内力为 $N^0(x),M^0(x),M_n^0(x)$，则广义位移：

$$\Delta_i = \int_l \frac{N(x)N^0(x)}{\mathrm{EA}}\mathrm{d}x + \int_l \frac{M(x)M^0(x)}{\mathrm{EI}}\mathrm{d}x + \int_l \frac{M_n(x)M_n^0(x)}{\mathrm{G}I_p}\mathrm{d}x$$

如果积分为正值，则 Δ_i 和单位力 F^0 同向。

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1) 利用卡氏定理求结构位移；

(2) 非线性材料的变形能计算；

(3) 灵活应用功的互等定理求复杂结构的变形。

【例1】 如图9-4所示，平面刚架ABC的A处为固定端，自由端C处受集中力P，P与水平线之间的夹角$\alpha=\frac{\pi}{8}$。假设AB轴线和杆BC轴线之间的夹角是直角，抗弯刚度均为εI，且不计轴力和剪力对变形的影响，试用卡氏定理计算自由端C处的位移Δc，并证明位移Δc的方向等于集中力P的方向。(武汉大学，2003年)

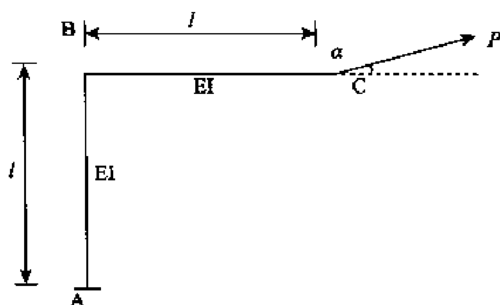


图9-4

解 建立如图9-5所示的坐标系，则：

BC段的弯矩是：$M(x_1)=P_V\cdot x_1 \qquad x_1\in[0,l]$

AB段的弯矩是：$M(x_2)=P_H\cdot x_2-P_V\cdot l \qquad x_2\in[0,l]$

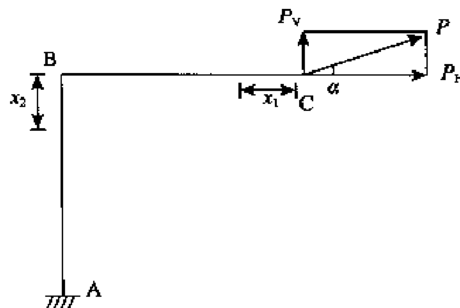


图9-5

刚架的应变能是，

$$U=\int\frac{M^2}{2EI}dx=\int_0^l\frac{(P_V\cdot x_1)^2}{2EI}\cdot dx_1+\int_0^l\frac{(P_Hx_2-P_Vx_1)^2}{2EI}\cdot dx_2$$

$$=\frac{1}{2EI}\cdot(\frac{1}{3}P_H{}^2l^3+\frac{4}{3}P_V{}^2l^3-P_HP_Vl^3)$$

由卡氏定理得到自由端C处沿水平方向和竖直方向的位移分别是，

$$\begin{cases}\Delta_H=\dfrac{\partial U}{\partial P_H}=\dfrac{l^3}{2EI}\cdot(\dfrac{2}{3}P_H-P_V)=0.12\cdot\dfrac{Pl^3}{EI}\\ \Delta_V=\dfrac{\partial U}{\partial P_V}=\dfrac{l^3}{2EI}\cdot(\dfrac{8}{3}P_V-P_H)=0.05\cdot\dfrac{Pl^3}{EI}\end{cases}$$

自由端C的位移是，

$$\Delta_C=\sqrt{\Delta_H{}^2+\Delta_V{}^2}=\sqrt{(0.12)^2+(0.05)^2}\cdot\frac{Pl^3}{EI}=0.13\cdot\frac{Pl^3}{EI}$$

且$\frac{\Delta_V}{\Delta_H}=\frac{0.05}{0.12}=0.4\approx\tan\alpha=0.37$

即位移 Δc 的方向等于集中力 P 的方向。

评注：对于熟悉卡氏定理的同学可以采用位移求解公式 $\Delta_i=\int_l\frac{M(x)}{EI}\cdot\frac{\alpha M(x)}{\alpha Fi}\cdot dx$ 直接得到自由端沿两方向的位移 Δ_H 和 Δ_V。

【例 2】 试用莫尔定理，求梁中点挠度：

(1) 受均布载荷的简支梁，如图 9-6(a) 所示；

(2) 中点受集中力的简支梁，如图 9-6(b) 所示，用功的互等定理，求变形前后梁的轴线所夹图形的面积。(华中科技大学，2003 年)

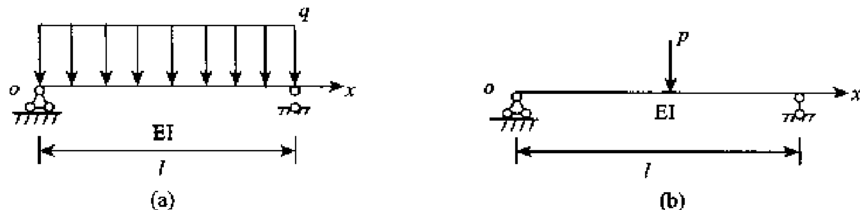


图 9-6

解 (1) 在简支梁中点施加向下单位作用力如图 9-7 所示。

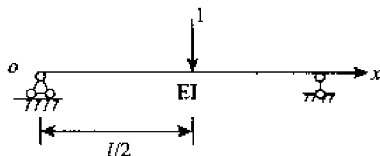


图 9-7

则在均布荷载、中点向下单位力作用下的截面弯矩分别是：

$$M(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{1}{2}qx^2\qquad x\in[0,l]$$

$$M^0(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & x\in[0,\frac{l}{2}]\\ \frac{1}{2}(l-x) & x\in[\frac{l}{2},l]\end{cases}$$

由莫尔定理得到梁中点挠度是：

$$f_c=\frac{1}{EI}\cdot\int_l M(x)\cdot M^0(x)dx$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\left[\int_0^{\frac{l}{2}}(\frac{ql}{2}\cdot x-\frac{1}{2}qx^2)\cdot\frac{1}{2}x\cdot dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(\frac{ql}{2}\cdot x-\frac{1}{2}qx^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot(l-x)dx\right]$$

$$=\frac{5ql^4}{384EI}\quad(\text{方向竖直向下})$$

(2) 设中点受集中力的简支梁的挠曲线是 $V(x)$ 如图 9-8 所示。

图 9-6(a) 所示均布荷载 q 在挠曲线 $V(x)$ 上做的功是：

$$W_1=\int_0^l q\cdot V(x)\cdot dx \qquad ①$$

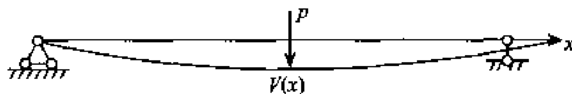


图 9-8

图 9-6(b) 所示的集中作用力 p 在挠曲线上做的功是：

$$W_2 = p \cdot f_c = \frac{5pql^4}{384\text{EI}} \qquad ②$$

由功的互等定理，$W_1 = W_2$

即 $\int_0^l q \cdot V(x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{5pql^4}{384\text{EI}}$

$$\int_0^l V(x)\mathrm{d}x = \frac{5pl^4}{384\text{EI}}$$

也就是说，中点受集中力作用下梁变形前后梁的轴线所夹图形的面积是 $\text{A} = \int_0^l V(x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{5pl^4}{384\text{EI}}$

评注：莫尔积分源自于单位荷载法，是虚功恒等式的一个直接结果。虚拟单位载荷 $\overline{F}$ 必须与所求位移 Δ 适配，如线位移须施加单位集中力，角位移须施加单位力偶，相对线位移或相对角位移须施加两个单位力或力偶等。功的互等定理也来源于虚功恒等式，即结构第一力系在第二力系弹性位移上的虚功，等于第二力系在第一力系弹性位移上的虚功。

【例 3】 如图 9-9 所示，试求长为 l，截面积为 A 的杆在拉力 p 的作用下的余能 U_C。材料在单向拉伸时的应力—应变关系是 $\sigma = \text{K}\sqrt{\varepsilon}$。(华中科技大学，2002 年)

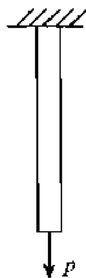


图 9-9

解 由余能比能的定义：$U_C = \int_0^\sigma \varepsilon \mathrm{d}\sigma = \int_0^\sigma (\frac{\sigma}{\text{K}})^2 \mathrm{d}\sigma = \frac{\sigma^3}{3\text{K}^2}$

而 $\sigma = \frac{p}{\text{A}}$，所以 $U_C = \frac{\left(\frac{p}{\text{A}}\right)^3}{3\text{K}^2} = \frac{p^3}{3\text{K}^2\text{A}^3}$

杆件的余能是：$U_C = \int_V U_C \mathrm{d}V = U_C \cdot \text{A}l = \frac{p^3 l}{3\text{K}^2\text{A}^2}$

评注：在应力应变关系是非线性时，应变比能和余能比能应根据定义积分得到，且此时用于求解结构的卡氏第二定理($\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i$) 应用余能定理($\frac{\partial U_C}{\partial F_i} = \Delta_i$) 来代替。

【例 4】 等截面刚架如图 9-10 所示，各杆的抗弯刚度 EI 相同。试用单位载荷法计算截面 A

的铅垂位移 f_A。略去轴力及剪力对变形的影响。(北京航空航天大学,2002 年)

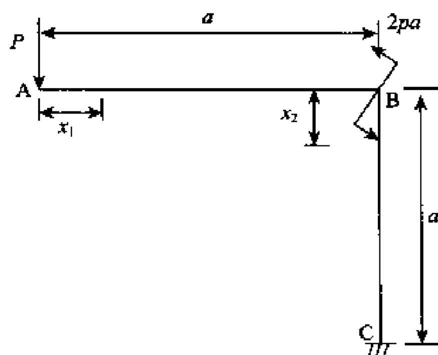


图 9-10

解 在自由端 A 施加铅垂单位作用力如图 9-11 所示,

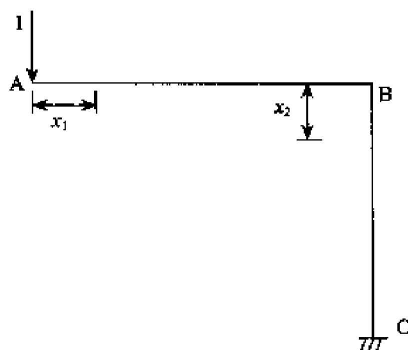


图 9-11

设 $m=2pa$,则刚架在外荷载和单位力作用下的弯矩是,

$$\begin{cases} M(x_1)=px_1 & x_1\in[0,a] \\ M(x_2)=pa+m & x_2\in[0,a] \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0(x_1)=x_1 & x_1\in[0,a] \\ M_0(x_2)=a & x_2\in[0,a] \end{cases}$$

自由端 A 的铅垂位移是,

(方法一,单位载荷法)

$$f_A=\frac{1}{EI}\cdot\left[\int_0^a M(x_1)M_0(x_1)\mathrm{d}x_1+\int_0^a M(x_2)M_0(x_2)\mathrm{d}x_2\right]$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\left[\int_0^a px_1\cdot x_1\cdot\mathrm{d}x_1+\int_0^a(pa+m)\cdot a\cdot\mathrm{d}x_2\right]$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{pa^3}{3}+(pa+m)\cdot a^2\right]=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{pa^3}{3}+3pa^3\right]=\frac{10pa^3}{3EI}$$

(方法二,卡氏定理方法)

$$\frac{\partial M}{\partial p}=\begin{cases} x_1 & x_1\in[0,a] \\ a & x_2\in[0,a] \end{cases}$$

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial p} = \int_l \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial p} dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_l M \cdot \frac{\partial M}{\partial p} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot [\int_0^a M(x_1) \cdot x_1 \cdot dx_1 + \int_0^a M(x_2) \cdot a \cdot dx_2]$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot [\int_0^a px_1 \cdot x_1 \cdot dx_1 + \int_0^a (pa + m) \cdot a \cdot dx_2]$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot [\frac{pa^3}{3} + (pa + m)a^2]$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot [\frac{pa^3}{3} + 3pa^3] = \frac{10pa^3}{3EI}$$

评注:读者在使用卡氏定理求解本题时,若没有将集中力偶 $2pa$ 用 m 来代替,便容易发生 $\frac{\partial M}{\partial p} = \begin{cases} x_1 & x_1 \in [0,a] \\ 3a & x_2 \in [0,a] \end{cases}$ 的错误,导致结果不对!

【例 5】 用卡氏定理计算如图 9-12 所示正方形桁架 A 点的水平位移 Δ_A。设各杆的抗拉(压)刚度均是 EA,桁架在 A、B 两节点分别受水平和铅垂向上的外载 F。(北京航空航天大学,2001 年)

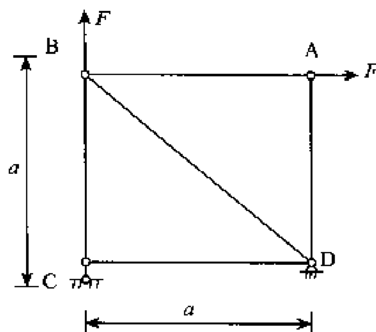


图 9-12

解 设 A 点的水平作用力是 $F_A = F$,B 点的铅垂作用力是 $F_B = F$,则各杆件的内力分别是,

$$\begin{cases} N_{AD} = 0 \\ N_{AB} = F_A \\ N_{BC} = F_A + F_B \\ N_{BD} = \sqrt{F_A^2 + F_B^2} \\ N_{CD} = 0 \end{cases}$$

系统的应变能是:

$$U = \int_l \frac{1}{2} \cdot F \cdot \frac{F}{EA} \cdot dx$$

$$= F_A \cdot \frac{F_A \cdot a}{2EA} + (F_A + F_B) \cdot \frac{(F_A + F_B)a}{2EA} + \sqrt{F_A^2 + F_B^2} \cdot \frac{\sqrt{F_A^2 + F_B^2} \cdot \sqrt{2}a}{2EA}$$

$$= \frac{F_A{}^2 a}{2EA} + \frac{(F_A + F_B)^2 a}{2EA} + \frac{(F_A{}^2 + F_B{}^2) \cdot \sqrt{2} a}{2EA}$$

由卡氏定理，A 节点的水平位移是，

$$\Delta_H = \frac{\partial U}{\partial F_A} = \frac{2F_A \cdot a}{2EA} + \frac{2(F_A + F_B) \cdot a}{2EA} + \frac{2F_A \cdot \sqrt{2} a}{2EA}$$

$$= \frac{2Fa}{2EA} + \frac{2(F + F) \cdot a}{2EA} + \frac{2F \cdot \sqrt{2} a}{2EA} = \frac{(3 + \sqrt{2}) Fa}{EA}$$

评注：同前面习题一样，如果同一结构中有数值相同或有一定关系的几个力，计算时应以不同符号将它们区分开来，待求导后再代入各自的值。

【例 6】 如图 9-13 所示的框架在 A 和 C 点作用以力 P，构件 AB 和 BC 相同，长度均为 l，弯曲刚度均为 EI，轴向刚度均为 EA，求在 A 和 C 点距离增加 Δ(由于力 P)，既考虑弯曲变形也考虑轴向变形。在 $\beta = 0°$ 和 $\beta = 90°$ 的特殊情况下结果如何?(北京大学，2000 年)

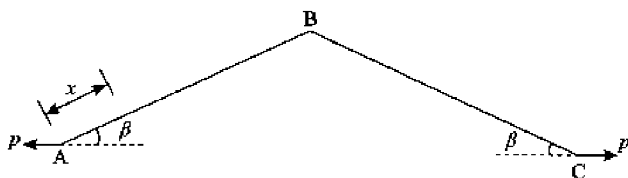


图 9-13

解 对于构件 AB，任意 x 截面的弯矩和轴力是，

$$\begin{cases} M(x) = p\sin\beta \cdot x \\ N(x) = p\cos\beta \end{cases}$$

由对称性，结构的应变能是，

$$U = 2\left[\int_l \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2(x)}{EI} \cdot dx + \int_l \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2(x)}{EA} \cdot dx\right]$$

$$= 2 \cdot \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{(p\sin\beta \cdot x)^2}{EI} \cdot dx + 2 \cdot \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{(p\cos\beta)^2}{EA} \cdot dx$$

$$= \frac{p^2 \sin^2\beta \cdot l^3}{3EI} + \frac{p^2 \cos^2\beta \cdot l}{EA}$$

由卡氏定理得到 A 和 C 点距离的增加是，

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial p} = \frac{2p\sin^2\beta \cdot l^3}{3EI} + \frac{2p\cos^2\beta \cdot l}{EA}$$

当 $\beta = 0°$ 时，$\Delta = \frac{2pl}{EA}$；当 $\beta = 0°$ 时 $\Delta = \frac{2pl^3}{3EI}$。

评注：本题若用单位力法求解时，应在两点的相对位移方向上施加一对单位力，再进行莫尔积分，读者可以尝试。

【例 7】 如图 9-14 所示等截面小曲率(即 $\frac{d}{2} \ll R$) 的曲杆 AB 置于水平面内，横截面为圆形，直径为 d，中心线形成半径为 R 的四分之一圆，垂直载荷 F 作用在端点 B，A 端固定，试求 B 点的垂直位移和扭转角(E、G 已知)。(浙江大学，1998 年)

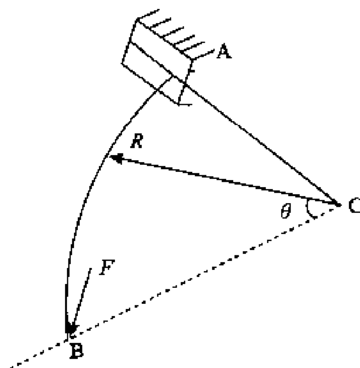


图 9-14

解 （方法一，单位力法）

在自由端B施加垂直向下的单位力和逆时针方向单位扭矩，分别如图 9-15(a) 和(b) 所示。

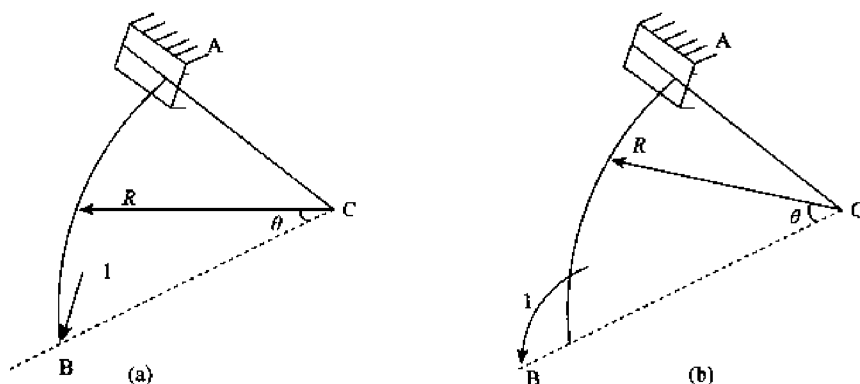


图 9-15

则在外载荷 F 和单位集中力作用下的任意 θ 截面的弯矩和扭矩是，

$$\begin{cases} M(\theta) = FR\sin\theta \\ T(\theta) = FR(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M^0(\theta) = R\sin\theta \\ T^0(\theta) = R(1-\cos\theta) \end{cases}$$

由莫尔积分得到 B 点的垂直位移是：

$$\Delta_V = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\theta) \cdot M^0(\theta) \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta + \frac{1}{\mathrm{GI_p}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(\theta) \cdot T^0(\theta) \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} FR\sin\theta \cdot R\sin\theta \cdot R \cdot \mathrm{d}\theta + \frac{1}{\mathrm{GI_p}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} FR(1-\cos\theta) \cdot R(1-\cos\theta)R\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi FR^3}{4\mathrm{EI}} + \frac{(3\pi-8)FR^3}{4\mathrm{GI_p}}$$

在外荷载 F 和单位扭矩作用下的任意 θ 截面弯矩和扭矩是：

$$\begin{cases} M(\theta) = FR\sin\theta \\ T(\theta) = FR(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M^0(\theta) = 1 \cdot \sin\theta \\ T^0(\theta) = -1 \cdot \cos\theta \end{cases}$$ （负号表示逆时针方向）

由莫尔积分得到B点的扭转角是：

$$\theta=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}M(\theta)\cdot M^0(\theta)\cdot R\cdot d\theta+\frac{1}{GI_p}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}T(\theta)\cdot T^0(\theta)\cdot R\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}FR\sin\theta\cdot\sin\theta\cdot Rd\theta+\frac{1}{GI_p}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}FR(1-\cos\theta)\cdot(-\cos\theta)\cdot Rd\theta$$

$$=\frac{\pi FR^2}{4EI}+\frac{(\pi-4)FR^2}{4GI_p}\quad（逆时针方向）$$

（方法二，卡氏定理方法）

在B点施加竖向集中力 F 和扭矩 T 如图9-16所示。

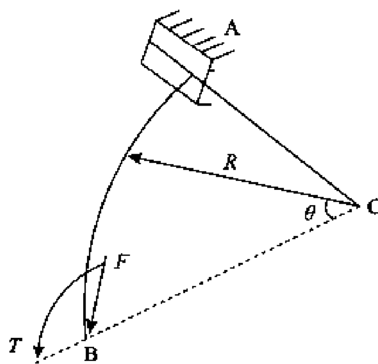


图9-16

则任意 θ 截面的弯矩和扭矩是：

$$\begin{cases}M(\theta)=FR\sin\theta+T\sin\theta\\T(\theta)=FR(1-\cos\theta)-T\sin\theta\end{cases}$$

其对集中力 F 和扭矩 T 的偏导数分别是：

$$\begin{cases}\frac{\partial M(\theta)}{\partial F}=R\sin\theta,\frac{\partial T(\theta)}{\partial F}=R(1-\cos\theta)\\\frac{\partial M(\theta)}{\partial F}=\sin\theta,\frac{\partial T(\theta)}{\partial T}=-\cos\theta\end{cases}$$

令 $T=0$，由卡氏定理，B点的垂直位移是：

$$\Delta_V=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}M(\theta)\cdot\frac{\partial M(\theta)}{\partial F}\cdot R\cdot d\theta+\frac{1}{GI_p}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}T(\theta)\cdot\frac{\partial T(\theta)}{\partial F}\cdot R\cdot d\theta$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(FR\sin\theta+T\sin\theta)\cdot R\sin\theta\cdot R\cdot d\theta+\frac{1}{GI_p}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}[FR(1-\cos\theta)-T\cos\theta]\cdot R(1-\cos\theta)\cdot Rd\theta$$

$$=\frac{\pi FR^3}{4EI}+\frac{\pi TR^2}{4EI}+\frac{(3\pi-8)FR^3}{4GI_p}+\frac{(\pi-4)TR^3}{4GI_p}$$

$$=\frac{\pi FR^3}{4EI}+\frac{(3\pi-8)FR^3}{4GI_p}$$ 令 $T=0$，B 点的扭转角是：

$$\theta=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}M(\theta)\cdot\frac{\partial M(\theta)}{\partial T}\cdot R\cdot d\theta+\frac{1}{GI_p}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}T(\theta)\cdot\frac{\partial T(\theta)}{\partial T}\cdot R\cdot d\theta$$

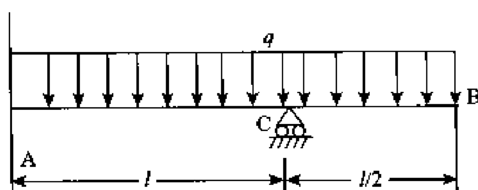
$$=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(FR\sin\theta+T\sin\theta)\cdot\sin\theta\cdot Rd\theta+\frac{1}{GI_p}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}[FR(1-\cos\theta)-T\cos\theta]\cdot(-\cos\theta)\cdot Rd\theta$$

$$= \frac{\pi FR^2}{4EI} + \frac{\pi TR}{4EI} + \frac{(\pi - 4)FR^2}{4GI_p} + \frac{\pi TR}{4GI_p}$$

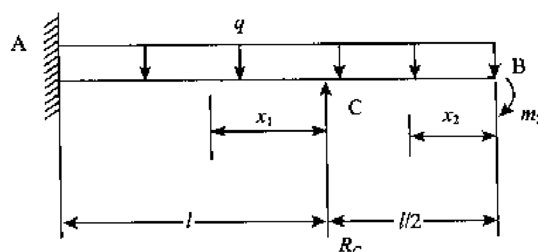
$$= \frac{\pi FR^2}{4EI} + \frac{(\pi - 4)FR^2}{4GI_p} \quad \text{（沿逆时针方向）}$$

评注：对于曲杆的计算，通常同时包含弯曲变形和扭转变形，读者请注意。

【例 8】 如图 9-17(a) 所示外伸梁，受均布载荷作用，E、I 已知。试用能量法求 B 端的转角。（浙江大学，1999 年）



(a)



(b)

图 9-17

解：此题为一次静不定，解除 C 处约束，以反力 R_c 代替，得右(b) 的相当系统，由于截面 B 处无力偶，所以不能直接用卡氏定理求解。为此，在 B 端加一个附加力偶矩 m_B。在 m_B、q、R_c 共同作用下，AB 梁各段的弯矩为：

AC 段：$0 \leqslant x_1 \leqslant l \quad M(x_1) = R_c x_1 \quad m_B - \frac{1}{2}q(\frac{l}{2} + x_1)^2 \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial R_c} = x_1 \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial m_B} = -1$

CB 段：$0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{l}{2} \quad M(x_2) = -m_B - \frac{1}{2}qx_2^2 \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial R_c} = 0 \quad \frac{\partial M(x_2)}{\partial m_B} = -1$

由卡氏定理计算，C 点的挠度和 B 端转角，可以在积分之前令弯矩表达式中的附加力矩 $m_B = 0$，则

$$y_c = \int \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial R_c}dx = \int \frac{M(x_1)}{EI}\frac{\partial M(x_1)}{\partial R_c}dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M(x_2)}{EI}\frac{\partial M(x_2)}{\partial R_c}dx_2$$

$$= \int_0^l \frac{R_c x_1 - \frac{1}{2}q(\frac{l}{2} + x_1)^2}{EI} x_1 dx_1 + 0 = \frac{1}{EI}(\frac{R_c l^3}{3} - \frac{17ql^4}{48})$$

由变形协调条件 $y_c = 0$，得 C 点的约束反力：$R_c = \frac{17}{16}ql$

B 端的转角 $\theta_B = \int_l \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial m_B}dx = \int_0^l \frac{M(x_1)}{EI}\frac{\partial M(x_1)}{\partial m_B}dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M(x_2)}{EI}\frac{\partial M(x_2)}{\partial m_B}dx_2$

$$= \int_0^l \frac{R_c x_1 - \frac{1}{2}q(\frac{l}{2} + x_1)^2}{EI} \cdot (-1)dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{-\frac{1}{2}qx_2^2}{EI} \cdot (-1)dx = \frac{1}{EI}(-\frac{R_c l^2}{2} + \frac{9ql^3}{16})$$

将 $R_c = \frac{17}{16}ql$ 代入上式，得：$\theta_B = \frac{ql^3}{32}$

【例 9】 框架结构放于两支座上，如图 9-18 所示。框架 A、B 两点为铰接，C、D 两点为刚接。材料弹性常数 E 及框架面面积 A、惯性矩 I 均为已知。若在 CD 段加一垂直均布载荷 q，试求 AB 杆内力及框架中点 E 的弯矩（刚架 ABCD 的轴力、剪力忽略不计）。（上海交通大学，2001 年）

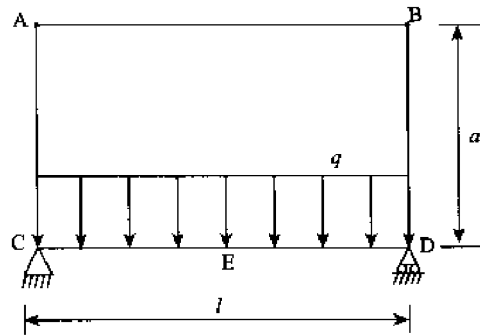


图 9-18

解　超静定结构 ABCD 的基本系如图 9-19 所示。

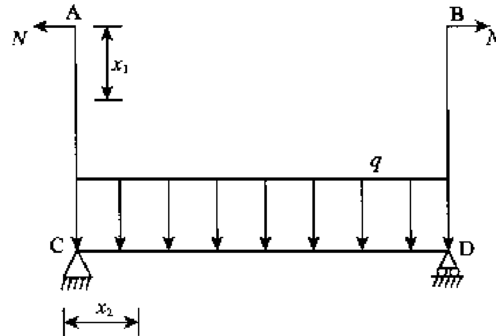


图 9-19

基本系各节段的弯矩分别是：

$$\begin{cases} M(x_1) = Nx_1 \\ M(x_2) = Na + \frac{1}{2}qx_2^2 - \frac{1}{2}ql \cdot x_2 \end{cases}$$

其对作用力 N 的偏导数是：

$$\frac{\partial M}{\partial N} = \begin{cases} x_1 & x_1 \in [0,a] \\ a & x_2 \in [0,l] \end{cases}$$

由卡氏定理得到的 A、B 两点的相对位移是：

$$\begin{aligned} \Delta l_{AB} &= \frac{1}{EI} \cdot \int_l M(x) \cdot \frac{\partial M}{\partial N} \cdot dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \int_0^a M(x_1) \cdot x_1 \cdot dx_1 + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} M(x_2) \cdot a \cdot dx_2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \int_0^a Nx_1 \cdot x_1 \cdot dx_1 + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{l}{2}} (Na + \frac{1}{2}qx_2^2 - \frac{1}{2}qlx_2) \cdot a \cdot dx_2 \\ &= \frac{1}{EI} \cdot (\frac{2}{3}Na^3 - \frac{1}{12}qal^3 + Na^2 l) \end{aligned}$$

而杆 AB 的伸长量是：

$$\Delta l_{AB} = -\frac{Nl}{EA}\text{（负号表示收缩）}$$

根据变形协调条件，有

$$\frac{1}{EI} \cdot (\frac{2}{3}Na^3 - \frac{1}{12}qal^3 + Na^2 l) = -\frac{Nl}{EA}$$

$$N = \frac{qal^3}{4(3l\dfrac{I}{A} - a^3 - 3a^2 l)}$$

E 点的弯矩是：

$$M_E = Na + \frac{1}{2}q(\frac{l}{2})^2 - \frac{1}{2}ql \cdot (\frac{l}{2}) = \frac{qa^2 l^3}{4(3l\dfrac{I}{A} - a^3 - 3a^2 l)} - \frac{1}{8}ql^2$$

评注：杆 AB 在作用力 F 的反作用力 $F' = F$ 的作用下发生的是收缩变形，因而在杆 AB 的伸长量 Δl_{AB} 中应加上负号，读者要引起注意。

【例 10】 如图 9-20 所示梁支撑在弹簧刚度分别是 K_1 和 K_2 的 B、C 两弹簧上，试求 A 截面的垂直位移 f_A。梁的弯曲刚度 EI 已知。（湖南大学，2001 年）

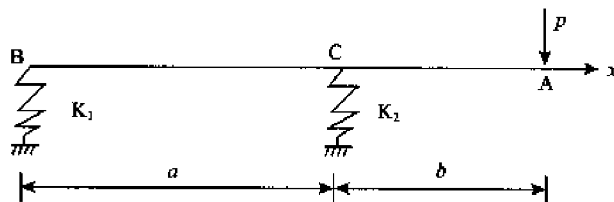


图 9-20

解 由平衡条件 $M_C = 0$ 得到弹簧支座 B 的支反力是：

$$F_B = \frac{pb}{a}(\text{垂直向下})$$

同样，由平衡条件 $M_B = 0$ 得到弹簧支座 C 的支反力是：

$$F_C = \frac{p(a+b)}{a}(\text{垂直向上})$$

对于图示坐标系下的任意 x 截面弯矩是：

$$M(x) = \begin{cases} -F_B x & x \in [0,a] \\ -p(a+b-x) & x \in [a,b] \end{cases}$$

系统的应变能是：

$$U = \frac{1}{2}K_1(\frac{F_B}{K_1})^2 + \frac{1}{2}K_2(\frac{F_C}{K_2})^2 + \int_0^{a+b}\frac{1}{2}\cdot M(x)\cdot\frac{M(x)}{EI}dx$$

$$= \frac{p^2b^2}{2K_1a^2} + \frac{p^2(a+b)^2}{2K_2a^2} + \frac{1}{2EI}\cdot\left[\int_0^a(-F_Bx)^2dx + \int_a^b[-p(a+b-x)]^2dx\right]$$

$$= \frac{p^2b^2}{2K_1a^2} + \frac{p^2(a+b)^2}{2K_2a^2} + \frac{p^2ab^2}{6EI} + \frac{p^2b^3}{6EI}$$

由卡氏定理得到 A 点的垂直位移是：

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial p} = \frac{pb^2}{K_1a^2} + \frac{p\cdot(a+b)^2}{K_2a^2} + \frac{p\cdot ab^2}{3EI} + \frac{pb^3}{3EI}$$

评注：由于弹簧支座本身的变形对 A 点位移有贡献，应将其视为结构的一部分，支座反力 F_A、F_B 视为结构内力。

【例 11】 如图 9-21 所示三铰刚架各段 EI 为相同常量，求中间铰 C 左右两端而的相对转角

θ_C（只考虑弯曲变形的影响）。（大连理工大学，2001 年）

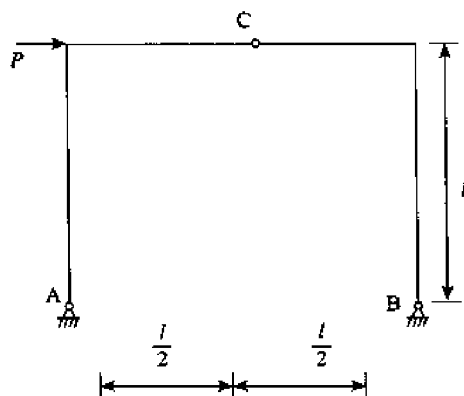


图 9-21

解　对中间铰施加一对力偶 M 如图 9-22 所示。

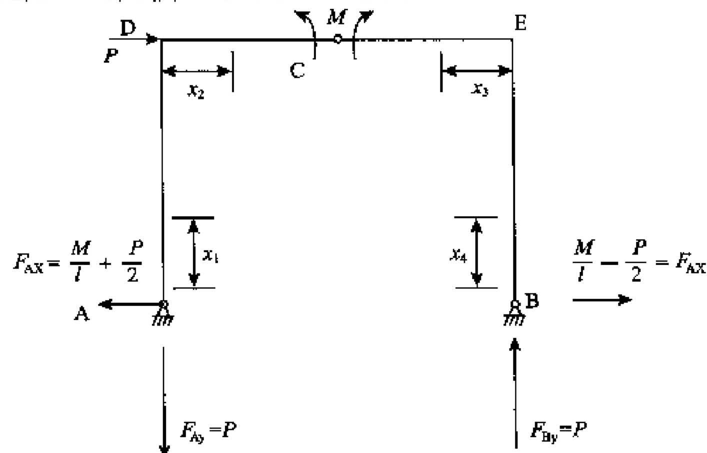


图 9-22

则刚架的各节段弯矩是：

$$\begin{cases} M(x_1) = (\frac{M}{l} + \frac{P}{2})x_1 & x_1 \in [0,l] \\ M(x_2) = (\frac{M}{l} + \frac{P}{2}) \cdot l - Px_2 & x_2 \in [0,\frac{l}{2}] \\ M(x_3) = (\frac{M}{l} - \frac{P}{2}) \cdot l + P \cdot x_3 & x_3 \in [0,\frac{l}{2}] \\ M(x_4) = (\frac{M}{l} - \frac{P}{2}) \cdot x_4 & x_4 \in [0,\frac{l}{2}] \end{cases}$$

其对力偶 M 的偏导数是：

$$\begin{cases} \frac{\partial M(x_1)}{\partial M} = \frac{x_1}{l} & x_1 \in [0,l] \\ \frac{\partial M(x_2)}{\partial M} = 1 & x_2 \in [0,\frac{l}{2}] \\ \frac{\partial M(x_3)}{\partial M} = 1 & x_3 \in [0,\frac{l}{2}] \\ \frac{\partial M(x_4)}{\partial M} = \frac{x_4}{l} & x_4 \in [0,l] \end{cases}$$

令 $M = 0$，由卡氏定理得到中间铰 C 左右两端的相对转角是：

$$\theta_C = \frac{1}{EI}\cdot\int_l M(x)\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial M}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\cdot\Big[\int_0^l\Big(\frac{M}{l}+\frac{P}{2}\Big)x_1\cdot\frac{x_1}{l}\cdot dx_1+\int_0^{\frac{l}{2}}\Big[\Big(\frac{M}{l}+\frac{P}{2}\Big)l-px_2\Big]\cdot 1\cdot dx_2+\int_0^{\frac{l}{2}}$$

$$\Big[\Big(\frac{M}{l}-\frac{P}{2}\Big)\cdot l+Px_3\Big]\cdot 1\cdot dx_3+\int_0^l\Big(\frac{M}{l}-\frac{P}{2}\Big)x_4\cdot\frac{x_4}{l}\cdot dx_4\Big]$$

$$= \frac{1}{EI}\cdot\Big[\Big(\frac{M}{l}+\frac{P}{2}\Big)\cdot\frac{l^2}{3}+\Big(\frac{M}{l}+\frac{P}{2}\Big)\cdot\frac{l^2}{2}-P\cdot\frac{l^2}{8}+\Big(\frac{M}{l}-\frac{P}{2}\Big)\cdot\frac{l^2}{2}$$

$$+P\cdot\frac{l^2}{8}+\Big(\frac{M}{l}-\frac{P}{2}\Big)\cdot\frac{l^2}{3}\Big]=0$$

评注：其实本题如果用单位力法，再利用 M 图的对称性和 M^0 图的反对称性很容易看出来 $\theta_C=0$，读者不妨画出各弯矩图来观察。

【例 12】 请用卡氏定理求如图 9-23 所示刚架 E 的水平位移，设各杆抗弯刚度均是 EI(计算中可略去轴力的影响)。(武汉大学，2002 年)

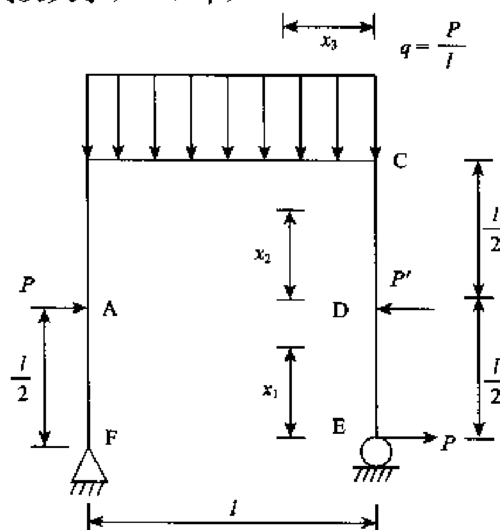


图 9-23

解 将 A 点和 D 点的水平作用力用 P' 来代替，则刚架各段的弯矩是：

$$\begin{cases} M(x_1)=Px_1 \quad & x_1\in[0,\frac{l}{2}] \\ M(x_2)=P(\frac{l}{2}+x_2)-P'x_2 \quad & x_2\in[0,\frac{l}{2}] \\ M(x_3)=\frac{1}{2}ql\cdot x_3-\frac{1}{2}qx_3{}^2+Pl-P'\cdot\frac{l}{2} \quad & x_3\in[0,l] \end{cases}$$

其对作用力 P 的偏导数分别是，

$$\begin{cases} \frac{\partial M(x_1)}{\partial P}=x_1 \quad & x_1\in[0,\frac{l}{2}] \\ \frac{\partial M(x_2)}{\partial P}=\frac{l}{2}+x_2 \quad & x_2\in[0,\frac{l}{2}] \\ \frac{\partial M(x_3)}{\partial P}=l \quad & x_3\in[0,l] \end{cases}$$

由卡氏定理和结构对称性，E 点的水平位移是：

$$\Delta_H=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{1}{EI}\int_l M(x)\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial P}\cdot dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{l}{2}} Px_1 \cdot x_1 \cdot \mathrm{d}x_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} [P(\frac{l}{2} + x_2) - P'x_2] \cdot (\frac{l}{2} + x_2) \cdot \mathrm{d}x_2 \\ + \int_0^{\frac{l}{2}} (\frac{1}{2}qlx_3 - \frac{1}{2}qx_3{}^2 + Pl - P'\frac{l}{2}) \cdot l \cdot \mathrm{d}x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \left[\frac{Pl^3}{24} + \frac{3}{16}ql^4 + \frac{1}{4}P'l^3\right] = \frac{2}{\mathrm{EI}} \cdot \left[\frac{Pl^3}{24} + \frac{3}{16}(\frac{P}{l})l^4 + \frac{1}{4}Pl^3\right] = \frac{23Pl^3}{48\mathrm{EI}}$$

评注:读者应注意结构对称性以简化计算。

【例 13】 矩形框架被固定在 A 点,在 D 点自由,(如图 9-24) 所示,所有三个构件的长度均为 L,弯曲刚度为 EI,在 D 点作用有竖直载荷 P,求自由端 D 的水平位移、竖直位移及转角 θ。(北京大学,1999 年)

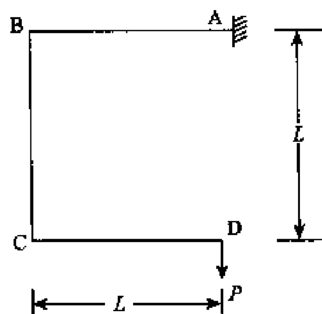


图 9-24

解:分别作出刚架在载荷 P 作用下,在水平单位载荷作用下以及在竖直单位载荷作用下和单位力偶矩作用下的弯矩图,如图 9-25(a)、(b)、(c)、(d)。

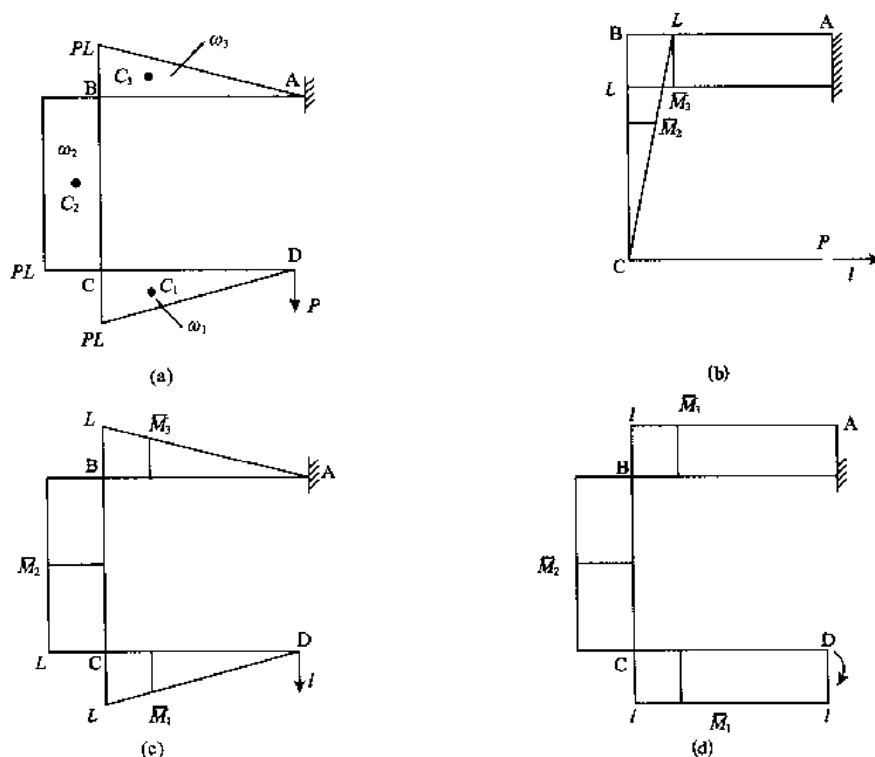


图 9-25

对弯矩图的每一部分分别应用图乘法，然后求其总和，即可求得位移值。

由图 9-25(a) 有：

$$\omega_1 = \frac{1}{2}PL \cdot L = \frac{1}{2}PL^2; \omega_2 = PL \cdot L = PL^2, \omega_3 = \frac{1}{2}PL \cdot L = \frac{1}{2}PL^2$$

设自由端 D 的水平位移为 δ_{Dx} 则从图 9-25(b) 中有：

$$\overline{M}_1 = 0, \overline{M}_2 = -\frac{1}{2}, \overline{M}_3 = -L$$

故 $\delta_{Dx} = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx = \frac{1}{EI}(\omega_1\overline{M}_1 + \omega_2\overline{M}_2 + \omega_3\overline{M}_3) = -PL^3$

负号表示 δ_{Dx} 的方向与图 9-25(a) 所加单位载荷方向相反。

设自由端 D 的竖直位移为 δ_{Dy}，则从图 9-25(c) 中有：

$$\overline{M}_1 = \frac{2}{3}L, \overline{M}_2 = L, \overline{M}_3 = \frac{2}{3}L$$

故 $\delta_{Dx} = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx = \frac{1}{EI}(\omega_1\overline{M}_1 + \omega_2\overline{M}_2 + \omega_3\overline{M}_3) = \frac{5}{3}PL^3$

设自由端 D 的转角为 θ_D，由图 9-25(d)，$\overline{M}_1 = 1$，$\overline{M}_2 = 1$，$\overline{M}_3 = 1$，故

$$\theta_D = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx = 2PL^2$$

第三节　习　题

一、填空题

1. 单位荷载法梁位移的计算公式为：$\Delta_k = \int_L \frac{M_P\overline{M}}{EI}dx$ 其中 Mp 是指________。

2. 悬臂梁 AB，如图 9-26 所示，当力 F_P 单独作用时的挠度和转角分别是 y_{B1} 和 θ_{B1}，应变能为 V_F，力偶 M 单独作用时的挠度和转角分别是 y_{B2} 和 θ_{B2}，应变能为 V_M，当 AB 梁在 F_P、M 共同作用下，B 点相应位移为________。

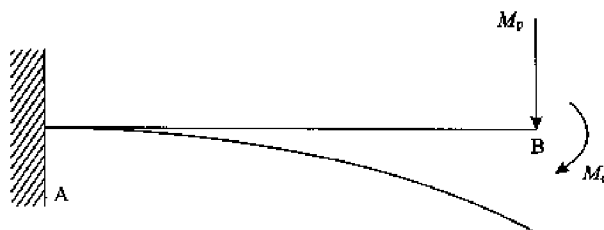


图 9-26

二、选择题

1. 如图 9-27 的结构，若 A、B、C 三截面的挠度分别以 y_A、y_B、y_C 表示，各杆均由同一样材料制成，都是等截面圆杆，则________。

A. $y_A = y_C$　　B. $y_A < y_C$　　C. $y_A > y_C$　　D. $y_A = 2y_B$

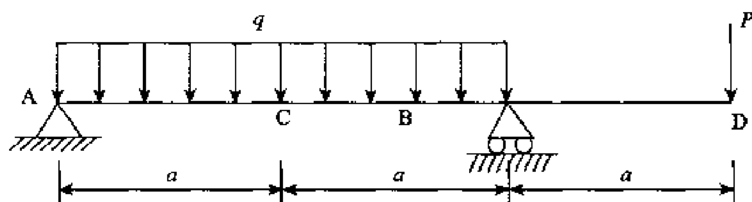


图 9-27

2. 欲使 AD 梁 C 点挠度为零(见图 9-27),则 P 与 q 的关系是:

A. $P=\frac{4qa}{3}$　　　　B. $P=\frac{5qa}{24}$

C. $P=\frac{5qa}{6}$　　　　D. $P=\frac{qa}{3}$

3. 简支梁受力如图 9-28 所示,它们的中点挠度分别是 f_P、f_m 和 f,应变能分别是 V_P、V_m 和 V,则________。

A. $f=f_P+f_m$;$V=V_P+V_m$　　　　B. $f\neq f_P+f_m$;$V=V_P+V_m$

C. $f=f_P+f_m$;$V\neq V_P+V_m$　　　　D. $f\neq f_P+f_m$;$V\neq V_P+V_m$

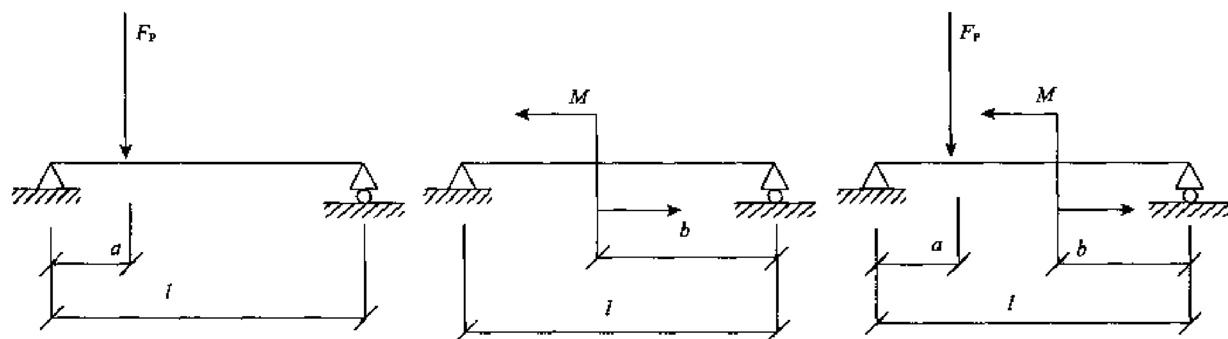


图 9-28

4. 悬臂梁如图 9-29 所示,其上作用着力 F_{P1}(横向集中力)、F_{P2}(轴向力)、F_{P3}(横向集中力偶)、F_{P4}(扭转外力偶)。它们分别作用在杆上时,杆的应变能以 V_1、V_2、V_3、V_4 表示。则________。

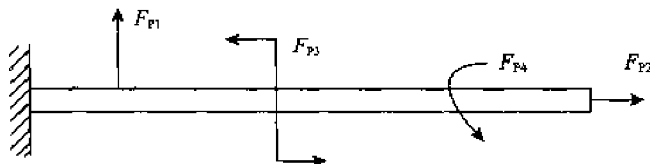


图 9-29

A. 当四个力同时作用在杆上时,杆件的总应变能 $V=V_1+V_2+V_3+V_4$

B. 当 F_{P1}、F_{P2}、F_{P3} 同时作用在杆上时,杆件的总应变能 $V=V_1+V_2+V_3$

C. 当 F_{P2}、F_{P3}、F_{P4} 同时作用在杆上时,杆件的总应变能 $V=V_2+V_3+V_4$

D. 当 F_{P1}、F_{P3}、F_{P4} 同时作用在杆上时,杆件的总应变形能 $V=V_1+V_3+V_4$

5. 图 9-30 所示四杆,材料相同,尺寸及载荷如图所示。

变形能最大的杆是：________。

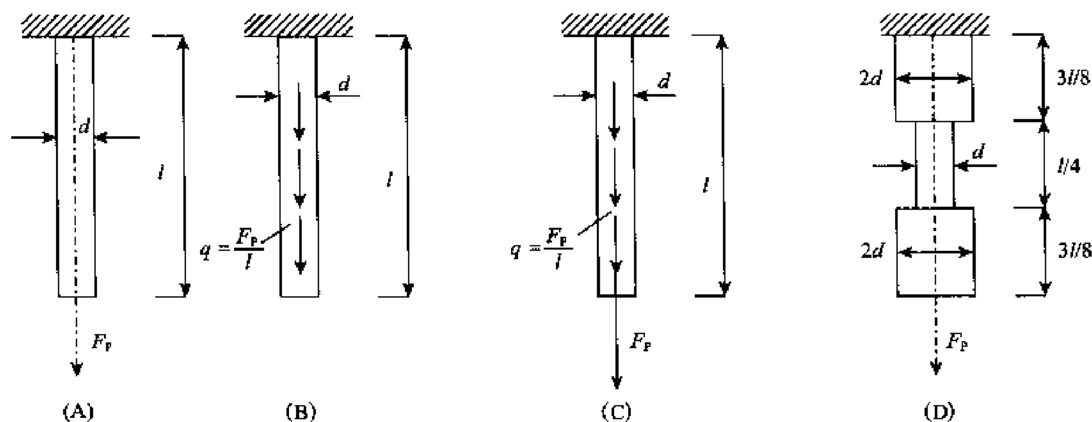


图 9-30

6. 图 9-31 所示刚架 ABCDE，外力 F_P 作用于 A 时，x_A、y_A、θ_A、x_D、y_D、θ_D 已求出，外力偶 M 作用于 D 时 x'_A、y'_A、θ'_A、x'_D、y'_D、θ'_D 亦已知，研究下列表达式是否正确，________。

A. $F_P \cdot x_A = M\theta'_D$　　　　B. $F_P \cdot x'_A = M\theta_D$

C. $F_P \cdot \theta'_D = Mx_A$　　　　D. $F_P \cdot \theta_D = Mx'_A$

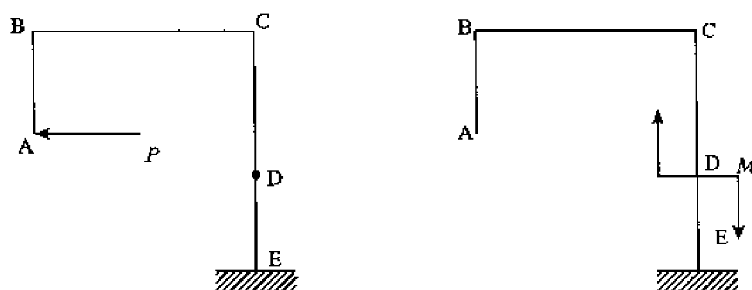


图 9-31

7. 线弹性材料悬臂梁承受载荷如图 9-32 所示，其中 $F'_P = F_P$，V_ε 为梁的总应变能，$V_{\varepsilon AB}$ 和 $V_{\varepsilon BC}$ 分别为 AB 和 BC 段梁的应变能，w_B、w_C 分别为点 B、C 的挠度。关于这些量之间的关系有下列四个等式，试判断哪一个是正确的，________。

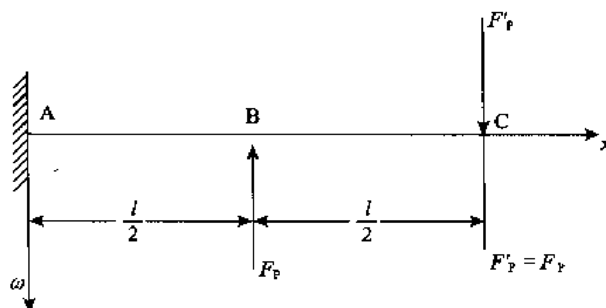


图 9-32

A. $\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_P} = w_B + w_C$

B. $\dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_P} = w_B - w_C$

C. $\dfrac{\partial V_{\varepsilon AB}}{\partial F_P} = w_B, \dfrac{\partial V_{\varepsilon BC}}{\partial F_P} = w_C$

D. $\dfrac{\partial V_{\varepsilon AB}}{\partial F_P} = w_B, \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_P} = w_C$

三、计算题

1. 抗弯刚度为EI，曲率半径为R的开口圆环形等截面曲杆，在开口处的AB点作用一对集中力P，如图9-33所示(AB间距离不计)。不计剪力的影响，试求开口处两侧截面A，B相应于载荷方向的张开位移。

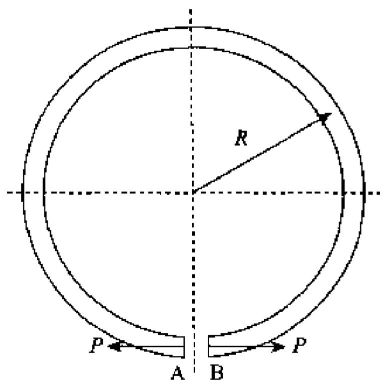


图 9-33

2. 已知图9-34中梁的抗弯刚度EI和支座B的弹簧刚度K。试用能量法求截面C的挠度。

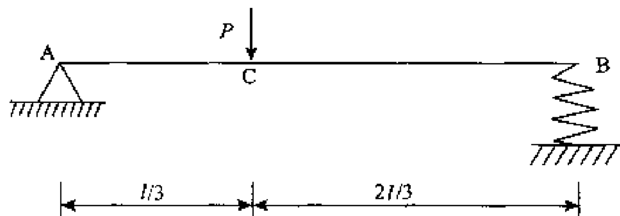


图 9-34

3. 如图9-35所示外伸梁，当截面1处作用力偶$M_1 = 600\text{N}\cdot\text{m}$时，测得截面2的挠度为$f_2 = 0.45\text{mm}$，问若截面2处作用一集中力$P_2 = 20\text{kN}(\downarrow)$时，截面1处的转角$\theta_1$是多少？

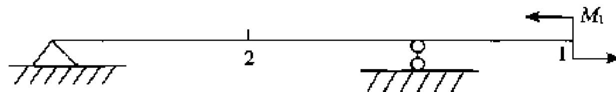


图 9-35

4. 试求图 9-36 所示梁的截面 B 处的挠度 y_B 和转角 θ_B。EI = 常数。

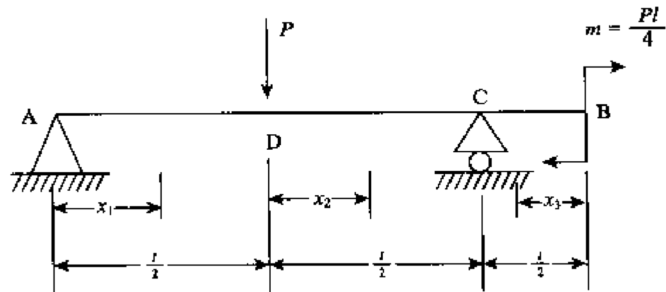


图 9-36

5. 如图 9-37 所示，装有尾顶针的车削工件可简化成静不定梁，用卡氏定理求铰支座反力。

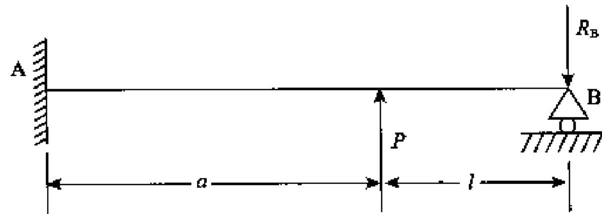


图 9-37

6. 轴线为水平平面内四分之一圆周的曲杆如图 9-38 所示，在自由端 B 作用垂直荷载 P。设 EI_z 和 GI_p 已知，试求截面 B 在垂直方向的位移。

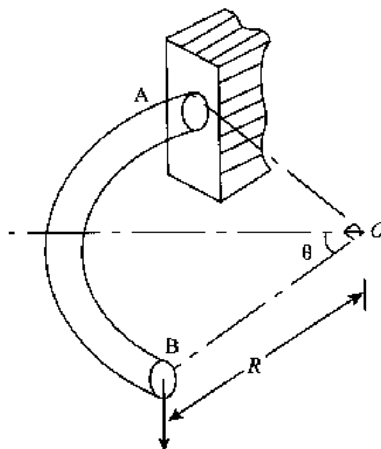


图 9-38

7. 如图 9-39 所示刚架各段杆的 EI 为已知，试求在缺口 A 截面处由于 P 力引起的位移。

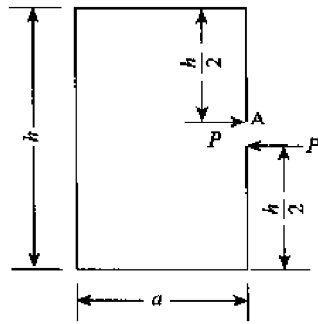


图 9-39

8. 简支梁跨中受集中力 P 作用，如图 9-40 所示，该梁的横截面为薄壁圆环，荷载 P，梁跨长 L，截面平均半径 r_0，壁厚 t 以及材料的弹性模量 E 与剪切弹性模量 G 均为已知，试推导考虑弯曲和剪切时梁中点的挠度 δ 的表达式。

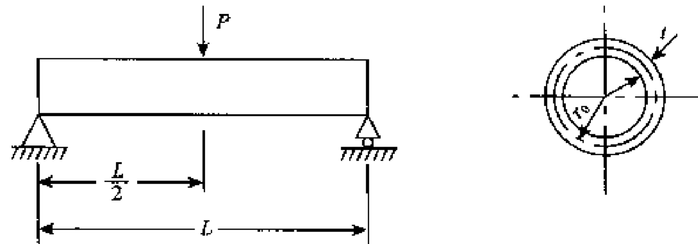


图 9-40

第 10 章　静不定结构

知识要点

本章主要介绍了静不定结构的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)力法解静不定结构；

(2)对称以及反对称的应用。

第一节　本章内容总结

1. 静定、静不定结构(系统)

无多余约束的几何不变的承载结构系统，其全部支撑反力与内力都可由静力平衡条件求得，此系统称为静定结构或系统。静定结构除了变形外，没有可运动的自由度。

在无多余约束的几何不变的静定系统上增加约束或联系，称为多余约束，并因而产生多余约束反力，则这样的有多余约束的系统，仅利用静力平衡条件无法求得其反力和内力，称为静不定(或超静定)系统。

内静不定：静不定结构内部约束(或联系)形成的内力不能单由静力平衡方程求出的情况称为内静不定结构。

外静不定：静不定结构的外部支座反力不能全由静力平衡方程求出的情况，常称为外静不定结构。

对于内、外静不定兼而有之的结构，有时称为混合静不定结构。

2. 静不定次数的确定

(1)根据结构约束性质可确定内、外约束力总数，内、外约束力总数与独立静力平衡方程总数之差即为静不定结构的静不定次数。

(2)外静不定的判断：根据结构与受力性质，确定其是空间或是平面承载结构，即可确定全部约束的个数。根据作用力的类型，可确定独立平衡方程数，二者之差为静不定次数。

(3)内静不定次数确定：

桁架：直杆用铰相连接，载荷只作用于结点，杆只受拉压力的杆系，其基本几何不变系由三杆组成△。◪ 仍由基本不变系扩展而成，仍是静定系，而⊠由于在基本系中增加了一约束杆，因而为一次超静定。

刚架：杆以刚结点相连接，各杆可以承受拉、压、弯曲和扭转，这样的杆系称为刚架。

对于闭口框架，则需用截面法切开一个切口使其变为静定结构(几何不变可承载结构)，其截面上作为平面受力结构(图 10-1a)，出现三个内力(轴力 N，弯矩 M，剪力 Q)，为三次静不定，而对于空间受力结构(图 10-1b)则为 6 次静不定。

对于大型结构，若为平面问题，则每增加一个闭合框架，结构超静定次数数便增加 3 次，而一个平面受力闭合圆环与之类似，也是三次静不定。

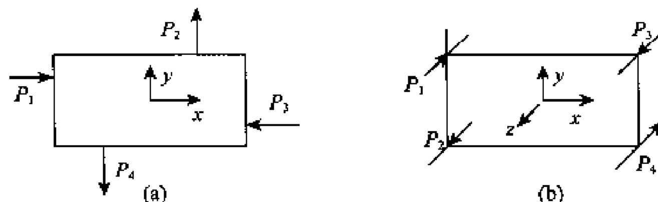


图 10-1

(4)混合静不定次数确定

先判断外静不定次数，后判断内静不定次数，二者之和为结构静不定次数。

3. 基本静定系(静定基)与相当系统

解除静不定结构的某些约束后得到静定结构，称为原静不定结构的基本静定系(简称静定基)。静定基的选择可根据方便来选取，同一问题可以有不同选择。

在静定基上加上外载荷以及多余约束力的系统称为静不定问题的相当系统。

4. 力法与位移法

(1)力法：以多余约束力为基本未知量，将变形或位移表示为未知力的函数，通过变形协调条件作为补充方程求来解未知约束力，这种方法称为力法，又叫柔度法。

分析要点：

①去除多余约束，建立相当系统；

②建立补充方程(找变形协调条件)；

③确定多余未知力(多余内力和多余外力)。

(2)位移法：以结点位移作为基本未知量，将力表示成位移的函数。通过结点平衡条件，解出未知量，这种方法称为位移法，又叫刚度法。

对 n 次静不定系统，如解除 n 个多余约束后的未知多余约束力为 $X_j(j=1,2,\cdots,n)$，它们将引起 X_i 作用点的相应的位移为 $\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij}$，面原系统由于 $X_j(j=1,\cdots n)$ 与外载荷共同作用对此位移限制为零(或已知)，故有：

$$
\begin{cases}
\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0\\
\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2P}=0\\
\qquad\vdots\\
\qquad\vdots\\
\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0
\end{cases}
$$

该式称为静不定力法正则方程，它们是对应于 n 个多余未知力 X_i 的变形协调条件，是求解静不定问题的补充方程。

根据位移互等定理有：

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}$$

δ_{ij} 称为柔度系数，是 X_j 方向上作用单位力时所求位移点产生的沿 X_i 方向上的位移；Δ_{iP} 是

外载荷作用下在所求位移点产生的沿 X_i 方向的相应位移。

5. 对称结构的对称变形与反对称变形

结构几何尺寸、形状，构件材料及约束条件均对称于某一轴，则称此结构为对称结构(图 10-2a)。

对称载荷：数值相等，方位与指向均对称，且成对作用在对称位置的载荷。

反对称载荷：若作用在对称位置的载荷数值相等、方位对称、但指向反对称，则为反对称载荷。

当对称结构受力也对称于结构对称轴，则此结构将产生对称变形(图 10-2b)。如外力反对称于结构对称轴，则结构将产生反对称变形(图 10-2c)。

正确利用对称、反对称性质，则可推知某些未知量，可大大简化计算过程。如对称变形对称截面上(图 10-2b)，反对称内力 Q 等于零或已知；反对称变形(图 10-2c)反对称截面上，对称内力 M 为零或已知。

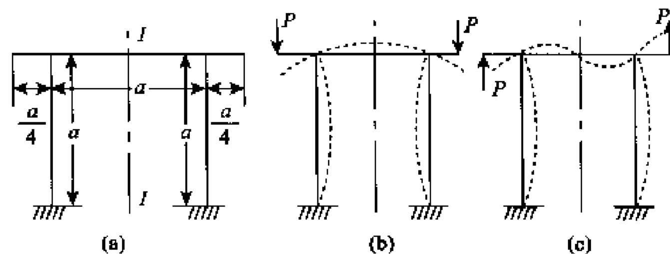


图 10-2

1)对称变形

如图 10-3a 的对称变形结构，切开结构对称截面，此为三次超静定，应有三个多余未知力，即轴力 X_1，弯矩 X_2 与剪力 X_3。可证明其反对称内力 X_3 应为零，正则方程为：

$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0$

$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0$

$\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0$

用图乘法计算 δ_{ij} 及 $\Delta_{iP}(i=1,2,3)$ 时，所要用的载荷弯矩图 M_P 以及 $X_1=1$，$X_2=1$，$X_3=1$ 时的弯矩图分别见图 10-3c、d、e、f，其中 MP，M_1，M_2 均对称于对称轴，而 M_3 反对称于对称轴。

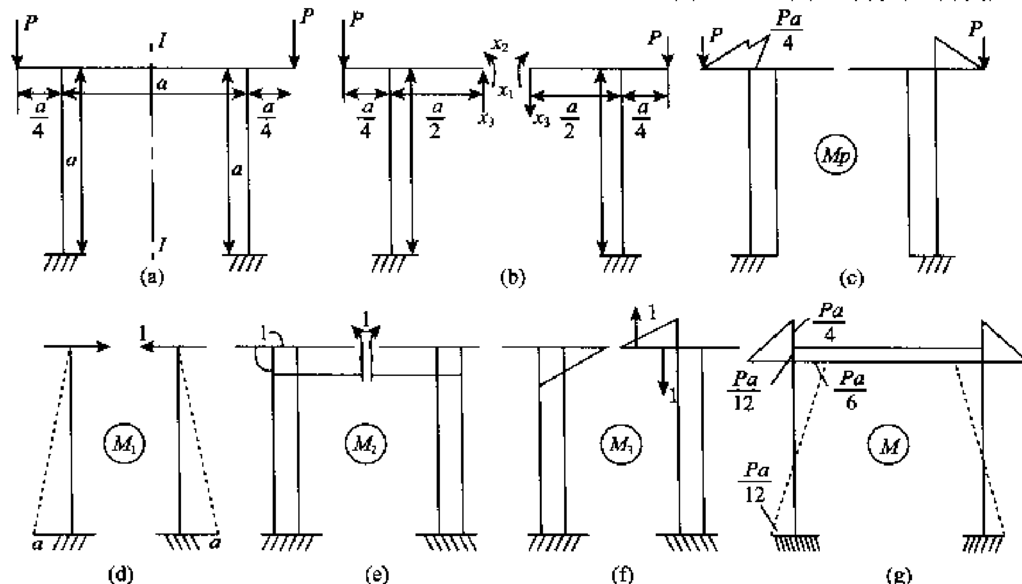


图 10-3

由莫尔积分知对称函数与反对称函数相乘在区间积分应为零，即有：

$$\Delta_{3P}=\int\frac{M_PM_3}{EI}=dx=0\quad \delta_{13}=\delta=\int\frac{M_1M_3}{EI}dx=0\quad \delta_{23}=\delta=\int\frac{M_1M_3}{EI}dx=0$$

$\because \delta_{33}\neq 0$ 则必有 $X_3=0$。

2)反对称变形

对于如图 10-4 所示的反对称变形结构，在对称面切开后，其多余未知力也是 X_1，X_2 与 X_3，同上类似证明，其对称内力 X_1 与 X_2 应等于零，只需一个协调方程，即可解出 X_3，即有：

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\delta_{23}=\delta_{32}=0\ ,\ \Delta_{1P}=\Delta_{2P}=0$$

面正则方程为：

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0\ ;\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0\ ;\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0$$

由前两式得 $X_1=X_2=0$，由第三式得 $X_3=\Delta_{3P}/\delta_{33}$。

对于某些载荷既非对称，也非反对称，但可将它们化为对称和反对称两种情况的叠加。如图 10-5 所示。

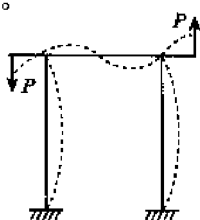


图 10-4

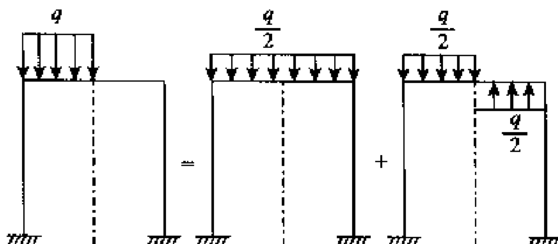


图 10-5

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1)力法正则方程的正确建立以及求解；

(2)利用对称性或反对称性对计算的简化。

【例 1】 钢杆如图 10-6 所示，其截面积 A＝10mm×10mm，若在加载 P 之前，杆下端与地面之间的间隔为 δ＝2mm，P＝30kN，弹性模量 E＝200GPa，材料是理想塑性，σ_S＝250MPa，求 P 力作用截面的位移。（西安电子科技大学，2000 年）

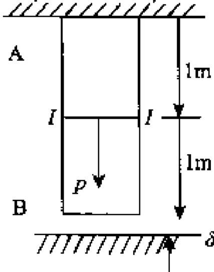


图 10-6

解 这是个材料非线性问题。关键在于判定杆变形是否进入塑性阶段，何时进入塑性阶段。

$$\frac{P}{A}=\frac{30\times10^3}{10\times10}=300(\text{MPa})>\sigma_S=250(\text{MPa})$$

表示可能进入塑性阶段。随 δ 值的不同，可能会出现三种情况：

(1) 上、下段都不进入塑性阶段；
(2) 杆底面和地面接触时，上段先处于弹性阶段，再进入塑性阶段；
(3) 杆底面接触地面时，上段已知进入塑性阶段。

P 力作用截面在弹性范围内的最大位移是：

$$\delta_S = \frac{\sigma_s}{E} \cdot l = \frac{250}{200 \times 10^3} \times 1000 = 1.25(\text{mm}) < \delta = 2(\text{mm})$$

表示本题属于第三种情况。

杆底面接触地面时上半段的载荷值是：

$$P_S = \sigma_S \cdot A = 250 \times 10^3 \times 10 \times 10 \times 10^{-6} = 25(\text{kN})$$

当载荷 P 从 PS 上升到 30kN 时，上半段已处于塑性阶段，不再分担载荷，全由下半段分担，位移量也由下半段的变形决定，即

$$\delta' = \frac{(P-P_S)L}{EA} = \frac{(30-25) \times 10^3 \times 1000}{200 \times 10^9 \times 100 \times 10^{-6}} = 0.25(\text{mm})$$

P 力作用截面的位移是：

$$\delta + \delta' = 2 + 2.05 = 2.25(\text{mm})$$

评注：若 $\Delta \leqslant 1\text{mm}$，是第一种情况；若 Δ 在 1～1.25mm 之间，是第二种情况。

【例 2】 如图 10-7 所示结构，①、②、③三杆材料相同，截面相同，弹性模量均是 E，杆截面面积是 A_0，横杆 CD 为刚体，载荷 P 作用位置如图所示。求①②③三杆的轴力。（山东大学，2001 年）

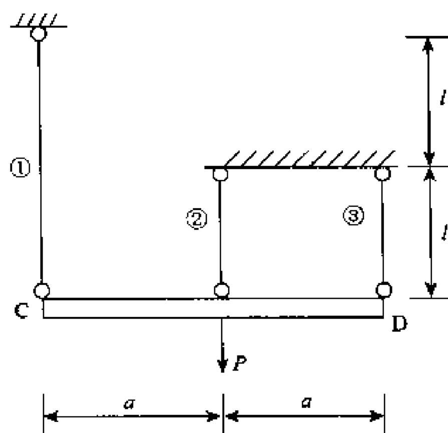


图 10-7

解 设杆①、②、③中的内力分别是 N_1、N_2、N_3，则对刚性杆 CD 的受力分析如图 10-8(a) 所示。

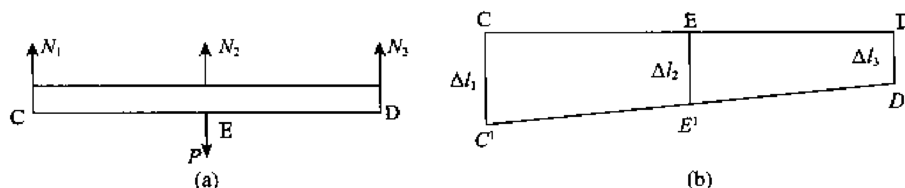


图 10-8

由平衡条件 $\sum F = 0$ 和 $\sum M_E = 0$ 得到：

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0 \ , N_1 a - N_3 a = 0$$

对刚性杆 CD 的变形协调条件分析如图 10-8(b)。

从图中得到变形协调条件为：

$$2 \cdot \Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_3$$

由物理条件，

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot 2l}{EA} \ , \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{EA} \ , \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l}{EA}$$

联合以上各式可得：$N_1 = 0.29P$，$N_2 = 0.43P$，$N_3 = 0.29P$

评注：一次超静定，注意到刚性杆的变形协调条件 $2 \cdot \Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_3$ 即可。

【例 3】 如图 10-9 所示已知钢杆 AB 和铝杆 CD 的尺寸相同，且其材料之剪切弹性模量之比是 $G_{AB}/G_{CD} = 3:1$。BF 和 ED 杆为刚性杆。试求载荷 P 将以怎样的比例分配于 BF 和 ED 杆上？（东南大学，2002 年）

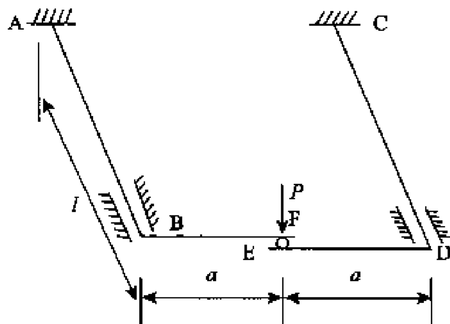


图 10-9

解 设载荷 P 分配于 BF 和 ED 杆上的载荷分别是 N_1 和 N_2，则由铰接点 E(F)的平衡条件 $\sum F = 0$ 得到：$N_1 + N_2 = P$

由分配载荷 N_1 作用下的钢杆 AB 的扭转角是：$\theta_{AB} = \dfrac{N_1 al}{G_{AB} I_P}$

由分配载荷 N_2 作用下的铝杆 CD 的扭转角是：$\theta_{CD} = \dfrac{N_2 al}{G_{CD} I_P}$

结构的变形协调条件是铰接点 F 和 E 的垂直位移相等，由于 BF 和 ED 杆为刚性杆得到 $\theta_{AB} \cdot a = \theta_{CD} \cdot a$

联合以上各式可得：$N_1 = \dfrac{3}{4}P$， $N_2 = \dfrac{1}{4}P$

这样，容易发现 $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{G_{AB}}{G_{CD}} = \dfrac{3}{1}$，即载荷 P 按照材料的刚度分别分配在 BF 和 ED 杆上。

评注：要注意到 BF 和 ED 杆为刚性杆，否则计算会十分复杂。

【例 4】 求如图 10-10 所示截面杆 A、B 处的反力。（西安电子科技大学，2000 年）

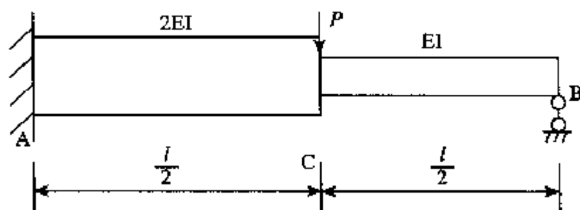


图 10-10

解 一次超静定结构 ABC 的基本静定系如图 10-11(a)所示。

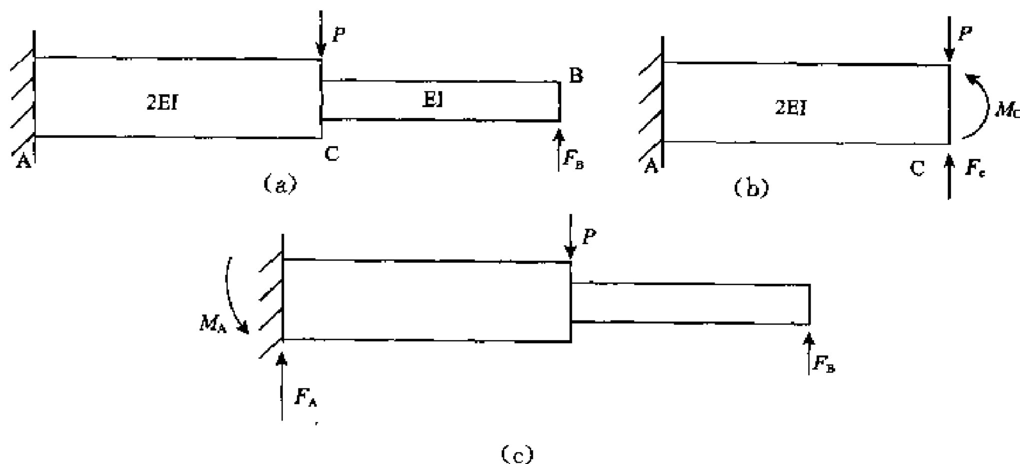


图 10-11

基本系的作用力 F_B 简化到 C 点，得到 $F_C = F_B, M_C = F_B \cdot \frac{l}{2}$，如图 10-11(b)所示。

于是 C 点的挠度和转角是：

$$f_C = \frac{(P - F_C)(\frac{l}{2})^3}{3 \cdot 2EI} - \frac{M_c \cdot (\frac{l}{2})^2}{2 \cdot 2EI} \text{（垂直向下）}$$

$$\theta_C = \frac{(P - F_C)(\frac{l}{2})^2}{2 \cdot 2EI} - \frac{M_c \cdot \frac{l}{2}}{2EI} \text{（顺时针方向）}$$

由此引起的 B 点挠度是：$f_{B1} = f_c + \theta_c \cdot \frac{l}{2}$

且由于 F_B 作用而引起的 B 点挠度是：$f_{B2} = -\frac{F_B \cdot (\frac{l}{2})^3}{3EI}$

B 点的挠度是：$f_B = f_{B1} + f_{B2} = \frac{(5P - 18F_B)l^3}{96EI}$

由变形协调条件，$f_B = 0$ 有，

$$\frac{(5P - 18F_B)l^3}{96EI} = 0 \text{，} \therefore F_B = \frac{5}{18}P \text{（垂直向上）}$$

设固定端 A 的支反力是 F_A 和 M_A，则对梁 AB 的受力分析如图 10-11(c)所示，

由平衡条件 $\sum F = 0$ 和 $\sum M = 0$ 有：

$$\begin{cases} F_A + F_B - P = 0 \\ M_A + F_B \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

解出 $F_A = \frac{13}{18}P$（垂直向上），$M_A = \frac{2}{9}Pl$（沿逆时针方向）。

评注：对变截面梁的变形计算要分段叠加进行，读者应熟练掌握。

【例 5】 抗弯刚度为 EI 的梁 AB 的支撑情况如图 10-12 所示，试求约束反力。（南京理工大学，2002 年）

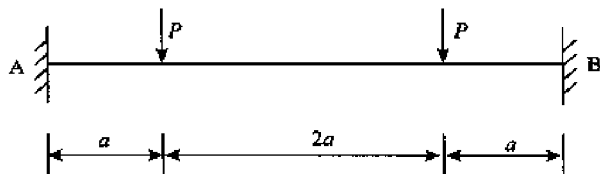


图 10-12

解　由结构对称性，取半结构分析如图 10-13(a)所示。

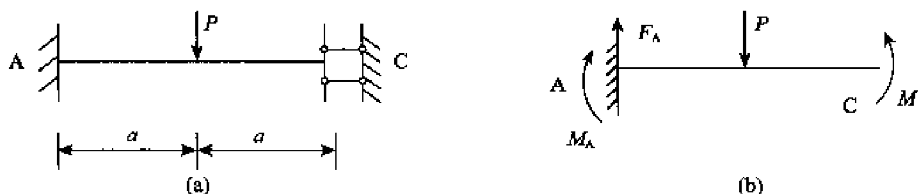


图 10-13

其半结构是一次超静定结构，基本系如图 10-13(b)所示。

悬臂梁 AC 的自由端转角是：

$$\theta_C = \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{M \cdot 2a}{EI}$$

由变形协调条件，即 $\theta_C = 0$，有：

$$\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{M \cdot 2a}{EI} = 0$$

$$M = \frac{1}{4}Pa$$

由平衡条件 $\sum F = 0$ 和 $\sum M = 0$ 得到：

$$\begin{cases} F_A - P = 0 \\ M_A + P \cdot a - M - 0 \end{cases}$$

从中解出 $F_A = P, M_A = -\frac{3}{4}Pa$（负号表示沿逆时针方向）。B 端的支反力 F_B、M_B 由对称性和 F_A、M_A 一致。

评注：本题还可以取两端有集中力矩作用的简支梁 AB 作为基本体系，读者可以自己尝试。

【例 6】　两端固支的梁受力如图 10-14 所示，已知：F，a，梁的抗弯刚度 EI，试求梁 AB 中间截面 C 的转角和铅垂位移 f_C。（东南大学，2002 年）

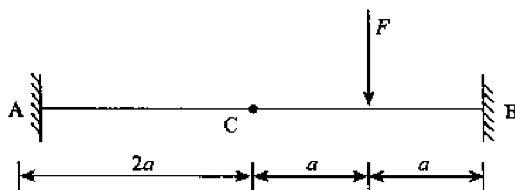


图 10-14

解　将题中的载荷 F 分解成正对称载荷和反对称载荷的叠加，如图 10-15(a)所示。

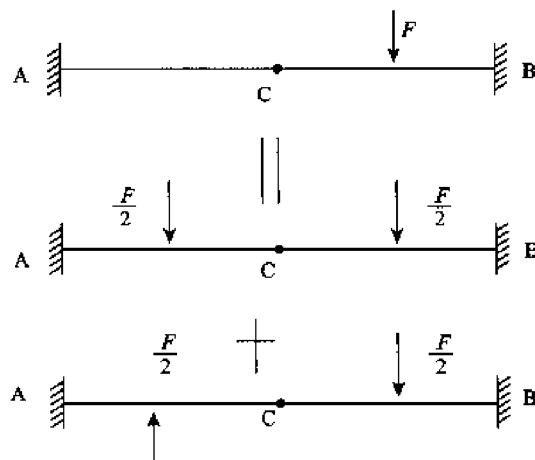


图 10-15(a)

① 对于正对称荷载作用下的结构利用对称性取其半结构分析如图 10-15(b)所示。

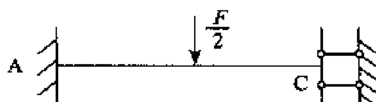


图 10-15(b)

图中一次超静定结构的基本系如图 10-15(c)所示。

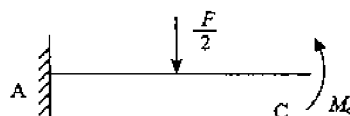


图 10-15(c)

由变形协调条件 $\theta_C=0$ 得到：

$$\frac{(\frac{F}{2})a^2}{2EI}-\frac{M_C\cdot(2a)}{EI}=0$$

$$M_C=\frac{1}{8}Fa$$

此时 C 截面挠度是：

$$f_c=\frac{(\frac{F}{2})a^3}{3EI}+\frac{(\frac{F}{2})a^2}{2EI}\cdot a-\frac{M_C\cdot(2a)^2}{2EI}=\frac{Fa^3}{6EI}\text{（垂直向下）}$$

② 对于反对称荷载作用下的结构利用其反对称性取其半结构分析如图 10-15(d)所示。

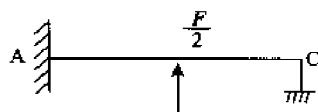


图 10-15(d)

图中一次超静定结构的基本系如图 10-15(e)所示。

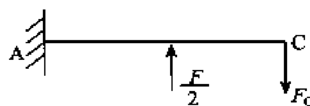


图 10-15(e)

由变形协调条件 $f_C=0$ 得到：

$$\frac{F_C(2a)^3}{3EI}+\frac{(\frac{F}{2})a^3}{3EI}-\frac{(\frac{F}{2})a^2}{2EI}\cdot a=0$$

$$F_C=\frac{5}{32}F$$

此时 C 截面的转角是：

$$\theta_C=\frac{(F_C)\cdot(2a)^2}{2EI}-\frac{(\frac{F}{2})\cdot a^2}{2EI}=\frac{Fa^2}{16EI}\text{（沿顺时针方向）}$$

评注：对称结构在正对称荷载作用下，中截面的反对称位移（如转角）和反对称内力（如剪力）等于零；对称结构在反对称荷载作用 F，中截面的正对称内力位移（如挠度）和正对称内力（如弯矩）等于零。

【例 7】 如图 10-16 所示连续梁中间支座 B 的高度可以改变。已知材料的弹性模量 E 和截面惯性矩 I 均是常数，欲使梁中弯矩 M_{max}减小，中间支座的高度应升高还是降低？若要使梁中弯矩 M_{max}减至最小，试问中间支座的高度应改变多少？（北京大学，2001 年）

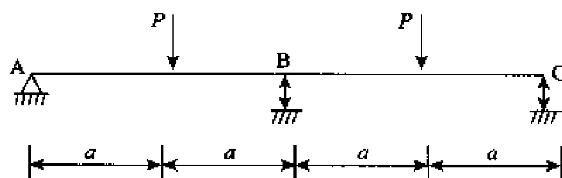


图 10-16

解 由结构对称性容易知道 B 点的位移和转角均等于零，取半结构分析如图 10-17(a)所示：



图 10-17(a)

对于图示一次超静定结构，其基本系如图 10-17(b)所示。

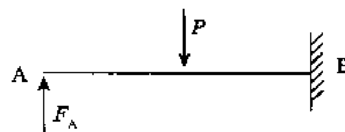


图 10-17(b)

由变形协调条件 $f_A=0$ 得到：

$$\frac{Pa^3}{3EI}+\frac{Pa^2}{2EI}\cdot a-\frac{F_A\cdot(2a)^3}{3EI}=0$$

$$F_A=\frac{5}{16}P$$

半结构的弯矩图如图 10-17(c)所示：

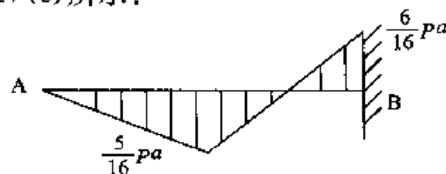


图 10-17(c)

显然，B截面的弯矩最大，要使B截面弯矩减小，需降低中间支座。且如果使梁中弯矩 M_{max}减至最小，应使B截面弯矩等于荷载 P 作用点处弯矩，即：

$$F_A \cdot a = P \cdot a - F_A \cdot 2a$$

$$F_A = \frac{P}{3}$$

此时，A点的位移是：

$$f_A = \frac{F_A \cdot (2a)^3}{3EI} - \frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI} \cdot a = \frac{1}{18} \cdot \frac{Pa^3}{EI} \text{（垂直向上）}$$

即中间支座应下降 $\frac{1}{18} \cdot \frac{Pa^3}{EI}$。

评注：本题如果不利用对称性将基本系选为简支梁AC也可以解答，但计算量很大，读者可以比较。

【例8】 刚架如图10-18所示，各杆的抗弯刚度均为EI，受图示集中力 P 作用。

(1)此结构为几次静不定？

(2)画出两种不同的基本静定系统，标明待求的未知量；

(3)选择(2)中的一种基本静定系统，用力法求出全部约束反力。（国防科技大学，2002年）（注：刚架中轴力和剪力引起的变形可以忽略不计）

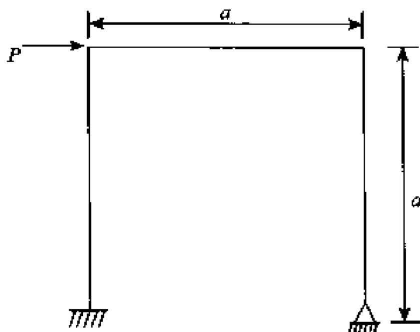


图 10-18

解 (1)此结构是二次超静定；

(2)原结构的两处基本静定系统分别如图10-19(a)和(b)所示。

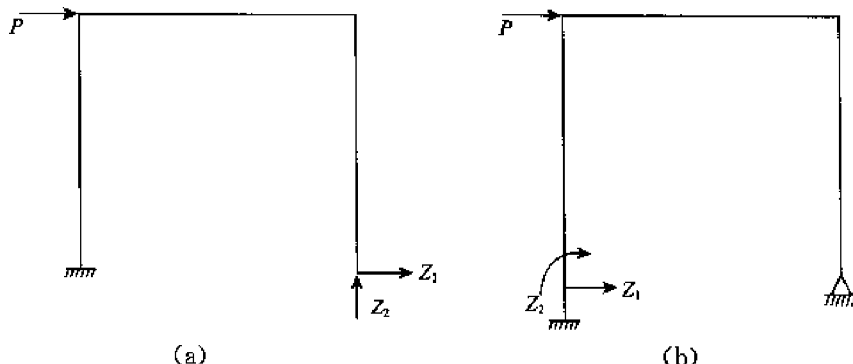


图 10-19

(3)对于图10-19(a)所示的基本静定系统，其力法正则方程是：

$$\begin{cases} \delta_{11}Z_1 + \delta_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}Z_1 + \delta_{22}Z_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

结构在载荷和单位力作用下的弯矩图如图10-20所示。

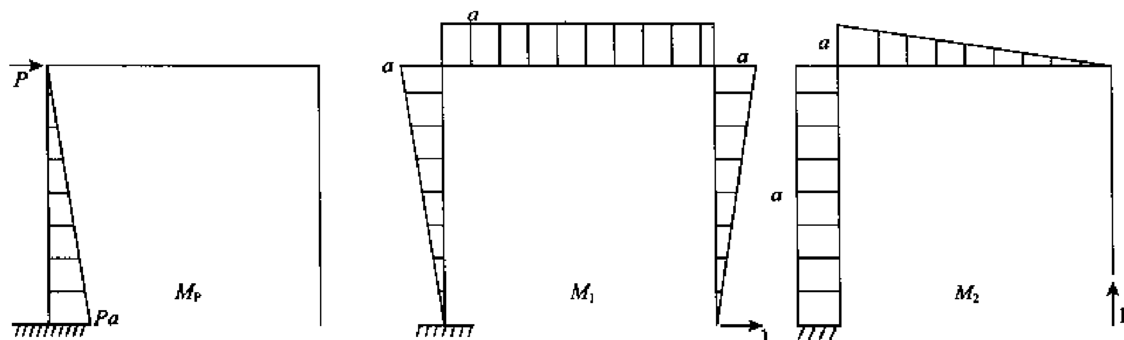


图 10-20

由莫尔积分容易得到力法正则方程的各系数是：

$$\delta_{11}=\frac{5}{3}\cdot\frac{a^3}{\mathrm{EI}},\delta_{22}=\frac{4}{3}\cdot\frac{a^3}{\mathrm{EI}},\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{a^3}{\mathrm{EI}},\Delta_{1\mathrm{p}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{Pa^3}{\mathrm{EI}},\Delta_{2\mathrm{p}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{Pa^3}{\mathrm{EI}}$$

从中解出 $Z_1=-\frac{5}{22}P$，　　$Z_2=\frac{6}{11}P$

评注：对于力法正则方程中各系数的意义以及求解方法，读者应熟练掌握。

【例 9】 如图 10-21 所示，直径为 D 的弯曲直角钢杆 ABC，位于水平面内，其悬臂端 C 用长为 l 的钢丝吊在支撑 E 处，钢丝直径为 d，当钢丝的温度下降 Δt℃时，试求钢丝的轴力及弯杆固定端 A 截面处的反力。设钢的弹性模量是 E，线膨胀系数为 α，各杆长度 a、b、l 均已知，钢的剪变模量为 G。（大连理工大学，2002 年）

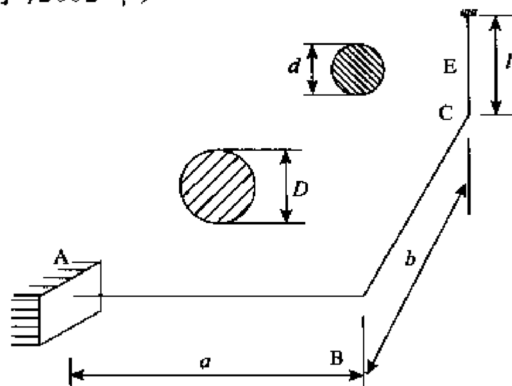


图 10-21

解 对于图示一次超静定结构取其基本系如图 10-22 所示。

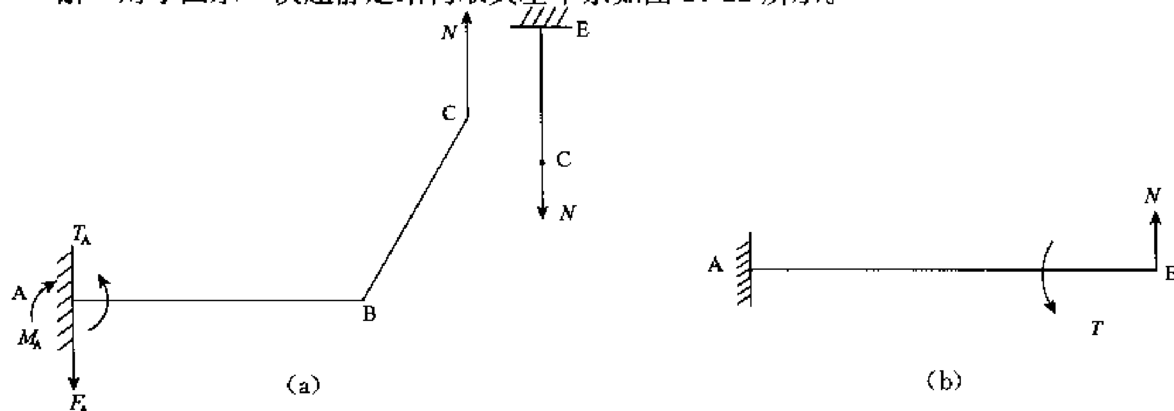


图 10-22

对于直角钢杆 ABC,将 C 点的作用力 N 简化到 B 点得到作用力 $N'=N$ 和扭矩 $T=Nb$,如图 10-22(b)所示。

则悬臂梁 AB 自由端 B 的挠度和扭转角是:

$$f_B=\frac{N'\cdot a^3}{3EI}=\frac{Na^3}{3EI}\text{(垂直向上)}$$

$$\theta_B=\frac{Ta}{GI_P}=\frac{Nb\cdot a}{GI_P}\text{(沿逆时针方向)}$$

由 B 点位移引起的 C 点挠度是:

$$f_{C1}=f_B+\theta_B\cdot b=\frac{Na^3}{3EI}+\frac{Nab^2}{GI_P}=\frac{64Na^3}{3\pi D^4E}+\frac{32Nab^2}{\pi D^4G}$$

由 C 点作用力 N 引起的 C 点挠度是: $f_{C2}=\dfrac{Nb^3}{3EI}$ (垂直向上)

于是,C 点的挠度是:

$$f_C=f_{C1}+f_{C2}=\frac{64Na^3}{3\pi D^4E}+\frac{32Nab^2}{\pi D^4G}+\frac{64Nb^3}{3\pi D^4E}\text{(垂直向上)}$$

而钢丝在温度下降和作用力 N 共同作用下的收缩量是:

$$\Delta l=\alpha\cdot\Delta t\cdot l-\frac{Nl}{EA}=\alpha\cdot\Delta t\cdot l-\frac{Nl}{E\cdot\frac{1}{4}\pi d^2}$$

由变形协调条件,即 $f_C=\Delta l$ 有:

$$\frac{64Na^3}{3\pi D^4E}+\frac{32Nab^2}{\pi D^4G}+\frac{64Nb^3}{3\pi d^4E}=\alpha\cdot\Delta t\cdot l-\frac{4Nl}{\pi d^2E}$$

$$N=\frac{\pi\alpha\cdot\Delta t\cdot l}{\frac{64a^3}{3D^4E}+\frac{32ab^2}{D^4G}+\frac{64b^3}{3d^4E}+\frac{4l}{d^2E}}$$

对于弯曲直角圆钢杆 ABC,由平衡条件 $\sum F=0$ 、$\sum M=0$ 、$\sum T=0$ 得到:

$$F_A-N=0\ ,M_A-Na=0\ ,T_A-Nb=0$$

从中解出 $F_A=N$ (垂直向下), $M_A=Na$ (沿顺时针方向), $T_A=Nb$ (沿逆时针方向)。

评注:本题中对于求解弯曲直角钢杆 ABC 的 C 点位移还可以采用单位力法,但使用叠加法可使计算大为简化。

【例 10】 如图 10-23 所示,在等截面圆环竖向直径 AB 两端作用一对 P 力,试求直径 AB 的长度变化。(复旦大学,1999 年)

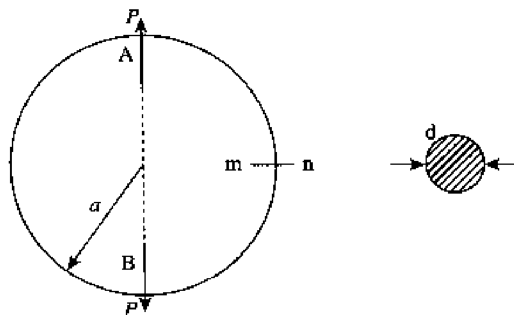


图 10-23

解 利用结构的对称性取 1/4 结构进行分析如图 10-24 所示。

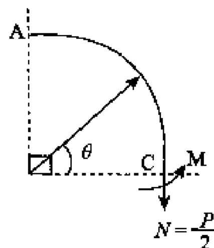


图 10-24

图示任意 θ 截面的弯矩是：$M(\theta) = Na(1-\cos\theta) - M$

其对弯矩 M、作用力 N 的偏导数是：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(\theta)}{\partial M} = -1 \\ \dfrac{\partial N(\theta)}{\partial N} = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

由卡氏定理，C 点转角是：

$$\theta_C = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_l M_{(x)} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\theta) \cdot \frac{\partial M(\theta)}{\partial M} \cdot a \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [Na(1-\cos\theta) - M] \cdot (-1) \cdot a \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \left[(M - Na) \cdot \frac{\pi}{2} + Na\right] \cdot a$$

由结构对称性，$\theta_C = 0$，即

$$\frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \left[(M - Na) \cdot \frac{\pi}{2} + Na\right] \cdot a = 0$$

$$M = (\frac{\pi}{2} - 1)Na = (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) \cdot Pa$$

同样，由卡氏定理，C 点的位移是：

$$\Delta_C = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_l M(x) \cdot \frac{\partial M_{(x)}}{\partial N} \cdot \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\theta) \cdot \frac{\partial M(\theta)}{\partial N} \cdot a \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [Na(1-\cos\theta) - M] \cdot [a(1-\cos\theta)] \cdot a \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \left[(\frac{3}{4}\pi - 2)Na + (1 - \frac{\pi}{2})M\right] \cdot a^2$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \left[(\frac{3}{4}\pi - 2) \cdot \frac{1}{2}p \cdot a + (1 - \frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})pa\right] \cdot a^2$$

$$= 0.0148 \cdot \frac{pa^3}{\mathrm{EI}}$$

这样，直径 AB 的长度改变是：

$$\Delta d = 2 \cdot \Delta c = 2 \times 0.0148 \frac{pa^3}{\mathrm{EI}} = 0.03 \cdot \frac{pa^3}{\mathrm{EI}}$$

评注：本题中对于对称性的利用，读者应仔细体会，在考研试题中这一类题目经常出现。对于曲杆的莫尔积分，读者也要熟练掌握。

【例 11】 作图 10-25 示边长为 a 的正方形平面刚架的剪力图和弯矩图。假定各杆的 EI 相同。(北京大学，1998 年)

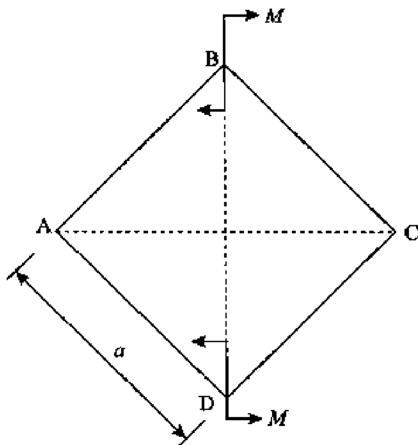


图 10-25

解 由结构对称性，取 1/4 结构分析如图 10-26(a)所示。

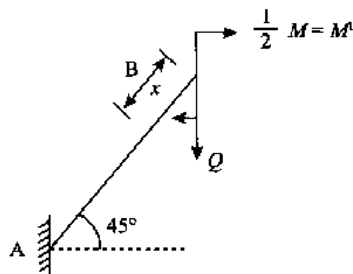


图 10-26(a)

对于图示的 1/4 结构，任意 x 截面的弯矩是：

$$M(x) = M' + Q\sin45° \cdot x = M' + Q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

其对弯矩 M 和作用力 Q 的偏导数是：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(x)}{\partial M'} = 1 \\ \dfrac{\partial M(x)}{\partial Q} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases}$$

由卡氏定理，B 点的位移是：

$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \cdot \int_l M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial Q} \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^a (M' + Q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{4}M'a^2 + \frac{1}{6}Qa^3\right]$$

而由于荷载的反对称性，B 点的对称位移 Δ_B 应等于零，即

$$\frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{4}M'a^2 + \frac{1}{6}Qa^3\right] = 0$$

$$Q=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{M'}{a}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{M}{a}\text{（负号表示向上）}$$

这样，AB 杆的剪力图和弯矩图分别如图 10-26(b)和(c)所示。

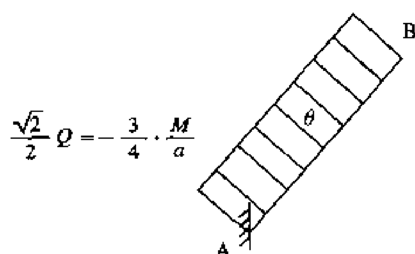


图 10-26(b)

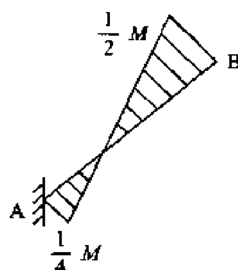


图 10-26(c)

由结构对称性容易得到结构的剪力图和弯矩图分别如图 10-26(e)和(f)所示。

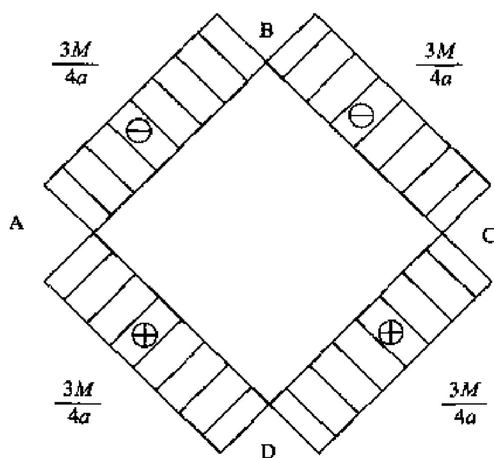


图 10-26(c)

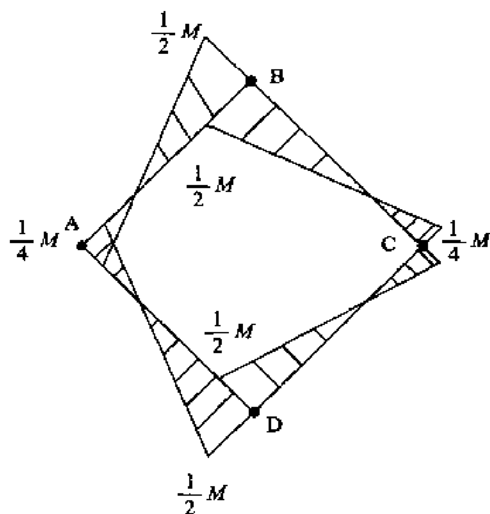


图 10-26(f)

评注：在 BD 截面，由于荷载的反对称性，其对称位移挠度应等于零，反对称内力剪力不等于零。

【例 12】 如图 10-27 所示一水平放置的半圆环，若圆截面曲杆的 EI 和 GI_P 为已知常数，试求 C 截面的弯矩。（武汉大学，2002 年）

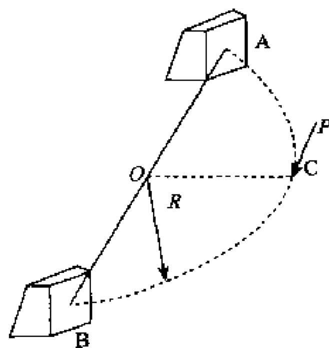


图 10-27

解 由结构对称性取半结构如图 10-28 所示。

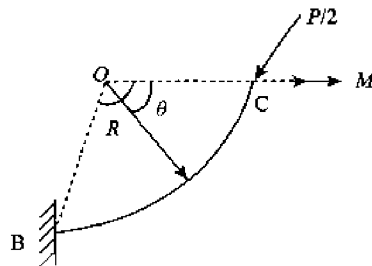


图 10-28

在图中得到任意 θ 截面的弯矩和扭矩是：

$$\begin{cases} M(\theta) = \frac{1}{2}PR\sin\theta - M\cos\theta \\ T(\theta) = \frac{1}{2}PR(1-\cos\theta) - M\sin\theta \end{cases}$$

其对弯矩 M 的偏导数是：

$$\begin{cases} \frac{\partial M(\theta)}{\partial M} = -\cos\theta \\ \frac{\partial T(\theta)}{\partial M} = -\sin\theta \end{cases}$$

由卡氏定理，C 截面的转角是：

$$\theta_C = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_l M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M} \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{\mathrm{GI_P}} \cdot \int_l T(x) \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial M} \cdot \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\theta) \cdot \frac{\partial M(\theta)}{\partial M} \cdot R\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\mathrm{GI_P}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(\theta) \cdot \frac{\partial T(\theta)}{\partial M} \cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}PR\sin\theta - M\cos\theta)(-\cos\theta)R\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\mathrm{GI_P}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\frac{1}{2}PR(1-\cos\theta) - M\sin\theta](-\sin\theta)R\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot (\frac{\pi MR - PR^2}{4}) + \frac{1}{\mathrm{GI_P}} \cdot (\frac{\pi MR - PR^2}{4}) = 0$$

由结构对称性知道 $\theta_C = 0$，即

$$(\frac{1}{\mathrm{EI}} + \frac{1}{\mathrm{GI_P}})(\frac{\pi MR - PR^2}{4}) = 0$$

$M = \frac{PR}{\pi}$（沿逆时针方向）

评注：除了利用卡氏定理求解本题，还可以使用单位力法得到 C 截面转角，也是十分方便的。

【例 13】 梁的 A、B 的两端固支，长 l，抗弯刚度为 EI，当左固支端 A 转动一个微小角度 θ 后，求梁左端 B 的约束反力。（南京理工大学，2001 年）

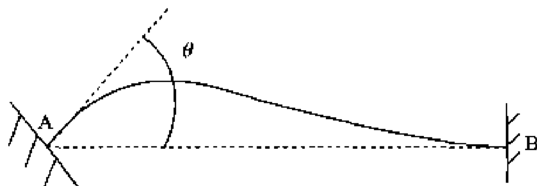


图 10-29

解 原二次超静定结构的基本系如图 10-30 所示。

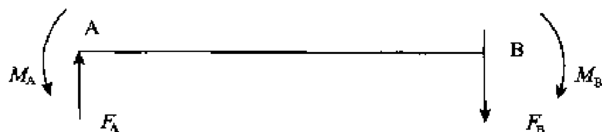


图 10-30

则 A 点的挠度和转角是：

$$\begin{cases} f_A = \dfrac{M_A l^2}{2EI} - \dfrac{F_A l^3}{3EI} \text{ 垂直向下} \\ \theta_A = \dfrac{M_A l}{EI} - \dfrac{F_A l^2}{2EI} \text{ 沿逆时针方向} \end{cases}$$

由原结构的变形协调条件，即 $f_A = 0$、$\theta_A = \theta$ 得到：

$$\begin{cases} \dfrac{M_A l^2}{2EI} - \dfrac{F_A l^3}{3EI} = 0 \\ \dfrac{M_A l}{EI} - \dfrac{F_A l^2}{2EI} = \theta \end{cases}$$

从中解出 $M_A = \dfrac{4EI\theta}{l}$（逆时针方向），$F_A = \dfrac{6EI\theta}{l^2}$（垂直向上）。

再由整体的平衡条件 $\sum F = 0$ 和 $\sum M = 0$，有：

$$\begin{cases} F_A - F_B = 0 \\ M_A - M_B - F_B l = 0 \end{cases}$$

解出 $F_B = F_A = \dfrac{6EI\theta}{l^2}$（垂直向下），$M_B = \dfrac{2EI\theta}{l}$（负号表示沿逆时针方向）。

评注：支座位移在结构中引起的附加内力如本题所示，在工程结构中广泛存在。

【例 14】 图示薄壁圆环，直径 D，抗弯刚度 EI 为已知，试求：(1)圆环内最大弯矩；(2)各 P 力作用点的位移；(3)结构的应变能。（华东理工大学，2001 年）

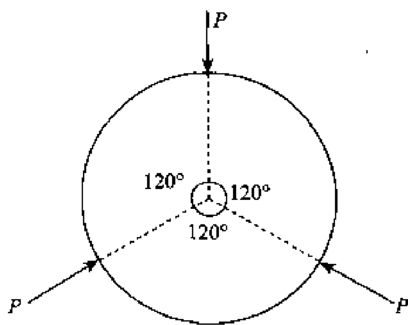


图 10-31

在 N_A 方向投影得 $N=P/\sqrt{3}$

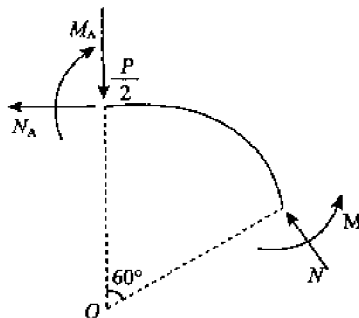


图 10-32

解 (1)由结构对称性取 1/6 结构分析如图 10-32 所示，

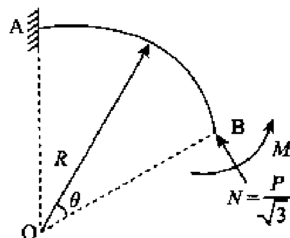


图 10-33

如图 10-33 所示，任意 θ 截面的弯矩是：$M(\theta)=M+NR(1-\cos\theta)$

其对弯矩 M 的偏导数是：$\dfrac{\partial M(\theta)}{\partial M}=1$

由卡氏定理，B 截面转角是：

$$\theta_B=\frac{1}{EI}\cdot\int_l M(x)\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial M}\cdot dx=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}M(\theta)\cdot\frac{\partial M(\theta)}{\partial M}\cdot Rd\theta$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}[M+NR(1-\cos\theta)]\cdot 1\cdot Rd\theta=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{\pi M}{3}+(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})NR\right]\cdot R$$

而根据结构对称性知道 $\theta_B=0$，即

$$\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{\pi}{3}\cdot M+(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})NR\right]\cdot R=0$$

$$M=\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{2\pi}\cdot NR=\frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6\pi}\cdot PR$$

$=-0.1PR$（负号表示沿顺时针方向）

于是，任意 θ 截面的弯矩是：

$$M(\theta)=-0.1PR+\frac{1}{\sqrt{3}}PR(1-\cos\theta)=(0.48-0.58\cos\theta)\cdot PR\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$$

显然，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，有最大弯矩是：

$M_{max}=0.2PR=0.1PD$（沿逆时针方向）

(2)结构的应变能是：

$$U=\frac{1}{EI}\cdot\int_l M(x)\cdot M(x)\cdot dx=6\cdot\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}}M(\theta)\cdot M(\theta)\cdot Rd\theta$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} [(0.48 - 0.58\cos\theta)PR]^2 \cdot R \cdot d\theta$$

$$= \frac{0.06P^2R^3}{EI}$$

令 P 力作用点的位移是 Δ_P，则结构的外力做功是：

$$W = 3P \cdot \Delta_P$$

由结构的外力做功等于其应变能得到：

$$3P \cdot \Delta_p = \frac{0.06P^2R^3}{EI}$$

$$\Delta_p = \frac{0.02PR^3}{EI} = \frac{0.01PD^3}{4EI}$$

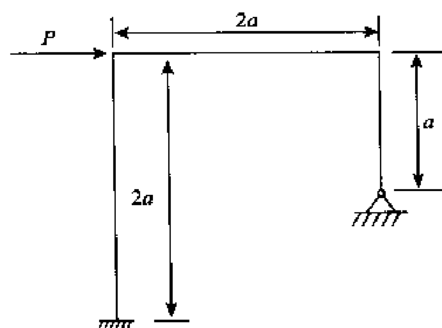
评注：利用外力做功等于结构应变能来求解 P 力作用点位移使计算量大为简化，读者要细心体会。

【例 15】 刚架各杆的抗弯刚度均为 EI，受力 P 作用，如图 10-34(a)。

(1)结构为几次静不定；

(2)画出两种不同的基本静定系统，标明待求未知量；

(3)选择其中的一种基本静定系统，用力法求全部约束反力。(北京理工大学，2000 年)

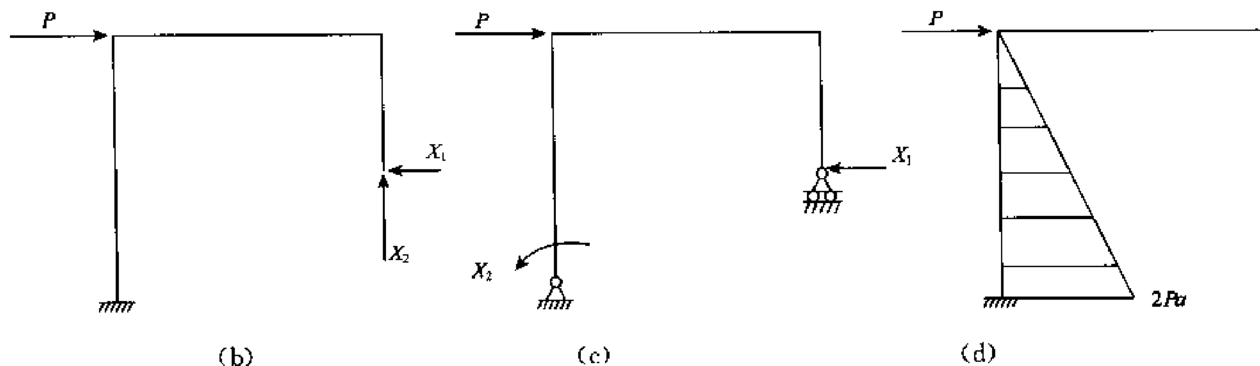


(a)

图 10-34

解 (1)此结构为二次静不定。

(2)两种基本静定系统如图 10-34(b)、(c)。图 10-34(b)中，X_1、X_2 为待求未知力，图 10-34(c)中 X_1 为待求未知力，X_2 为未知力偶。



(b) (c) (d)

图 10-34

(3)选图 10-34(b)为基本静定系统，用力法确定全部约束反力。首先应用莫尔定理分别求正则方程中的常数和系数。

$$\Delta_{1p}=\int\frac{M\overline{M}_1}{EI}dx=\int_0^{2a}\frac{Px\cdot(a-x)}{EI}dx=\frac{2Pa^3}{3EI}$$

$$\Delta_{2p}=\int_1\frac{M\overline{M}_2}{EI}dx=\int_0^{2a}\frac{Px\cdot(-2a)}{EI}dx=-\frac{4Pa^3}{EI}$$

$$\delta_{11}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_2}{EI}dx=\int_0^{a}\frac{x\cdot x}{EI}dx+\int_0^{2a}\frac{a\cdot a}{EI}dx+\int_0^{2a}\frac{(a-x)^2}{EI}dx=-\frac{3a^3}{EI}$$

$$\delta_{12}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_2}{EI}dx=-\int_0^{2a}\frac{a\cdot x}{EI}dx-\int_0^{2a}\frac{(a-x)\cdot 2a}{EI}dx=-\frac{2a^3}{EI}$$

$$\delta_{22}=\int\frac{\overline{M}_2\overline{M}_2}{EI}dx=\int_0^{2a}\frac{x\cdot x}{EI}dx+\int_0^{2a}\frac{2a\cdot 2a}{EI}dx=\frac{32a^3}{3EI}$$

代入正则方程，有：

$$\begin{cases}\dfrac{3a^3}{EI}X_1+(-\dfrac{2a^3}{EI})X_2+(-\dfrac{2Pa^3}{3EI})=0\\-\dfrac{2a^3}{EI}X_1+\dfrac{32a^3}{3EI}X_2+(-\dfrac{4Pa^3}{EI})=0\end{cases}$$

解得：$X_1=\frac{34}{63}$，　$X_2=\frac{10}{21}P$

再求固定端约束反力：

$\sum X=0$ 得 $X_A=-\frac{29}{63}P$

$\sum Y=0$ 得 $Y_A=-\frac{10}{21}P$

$\sum m_A=0$ 得 $M_A=\frac{32}{63}Pa$

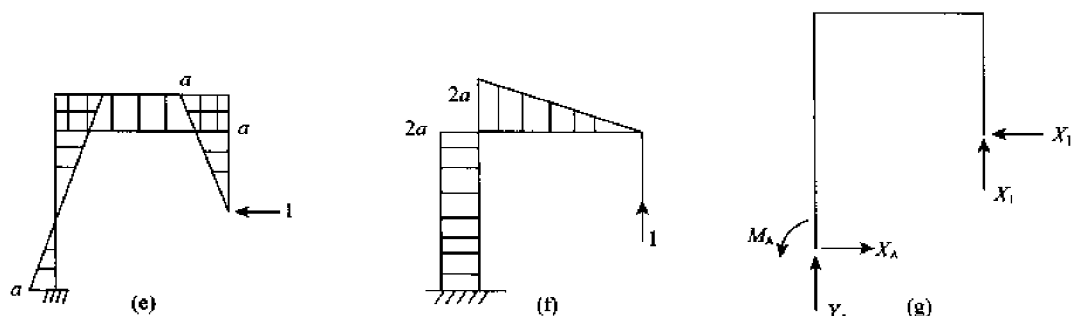


图 10-34

第三节　习　题

一、填空题

1. 力法方程的物理意义是：基本结构在________作用下，在________处的位移与________相等。

2. 简支梁 AC 在 B 点与钢索 BD 连接，钢索张紧但无初始拉力。当温度降低 T℃ 后，为求钢索中轴力所需的变形协调方程和补充方程分别为________。

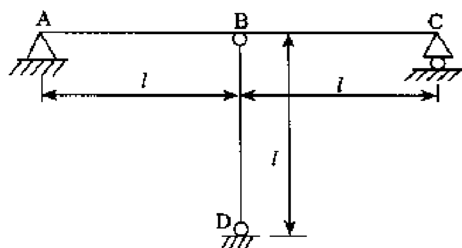


图 10-35

3. 图 10-36(a)是图(b)所示静不定梁的基本静定系，其力法正则方程为 $\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$ 则 δ_{11} 的几何意义是________，Δ_{1P} 的几何意义是________。

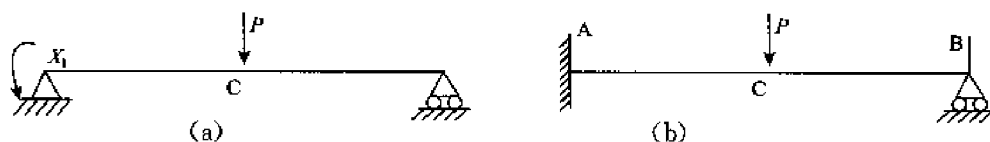


图 10-36

二、选择题

1. 两端固定的等直圆截面杆，如图 10-37 所示，B 截面受外力偶 M 作用使杆扭转，M_A 和 M_C 分别为 A 端和 C 端的约束反力。则________。

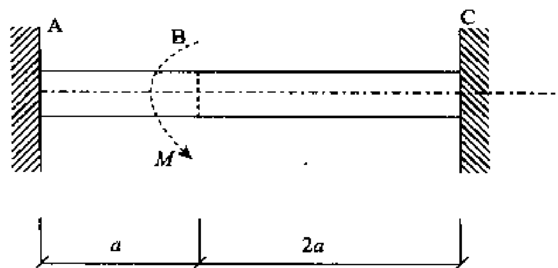


图 10-37

A. $M_A = M_C$　　B. $M_A = -M_C$　　C. $M_A > M_C$　　D. $M_A < M_C$

2. 图 10-38 所示结构的静不定度数________。

A. 1 度外静不定 2 度内静不定　　B. 1 度外静不定 3 度内静不定

C. 2 度外静不定 2 度内静不定　　D. 2 度外静不定 3 度内静不定

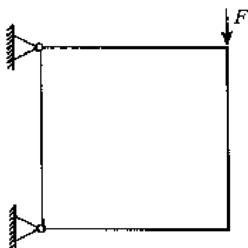
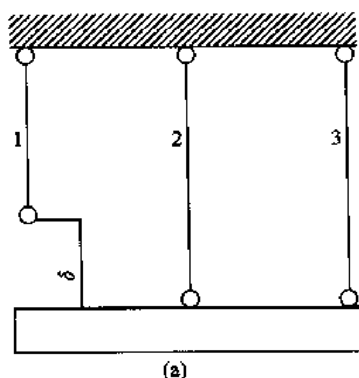


图 10-38

3. 图示 10-39 结构，AB 为刚性梁，1、2、3 杆材料及横截面积均相同，但其中一根杆的长度短了 δ，研究其装配应力：________。

A. 三杆材料为钢，如(a)装配　　B. 三杆材料为铜，如(a)装配

C. 三杆材料为钢，如(b)装配　　D. 三杆材料为铜，如(b)装配



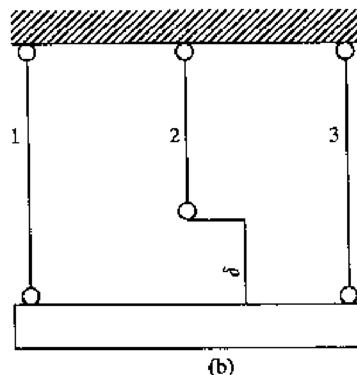


图 10-39

三、计算题

1. 静不定梁 AB 受力如图 10-40 所示。试用力法求约束反力偶 M_A。梁的抗弯刚度 EI 已知。

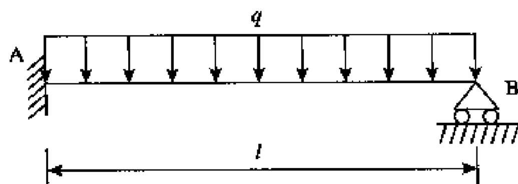


图 10-40

2. 刚架受力如图 10-41 所示。各杆的 EI 相同，试求最大弯矩及其发生的位置。

3. 如图 10-42 所示正方形刚架，由材料相同的等截面杆组成，试计算其内力。

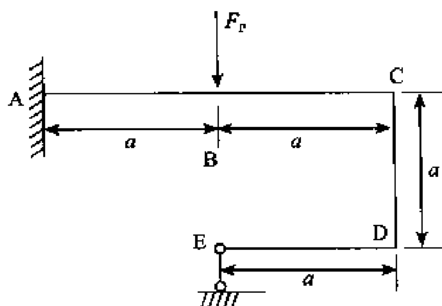


图 10-41

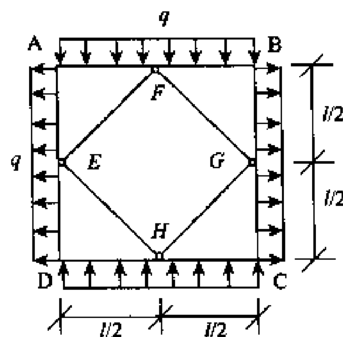


图 10-42

4. 车床的主轴简化成直径为 $d=90\text{mm}$ 的等截面当量轴，在垂直平面内的受力情况如图 10-43 所示。P_b 和 P_z 分别是传动力和切削力简化到轴线上的分力，且 $P_b=3.9\text{kN}$，$P_z=2.64\text{kN}$。若 $E=200\text{GPa}$，试求 D 点的挠度。

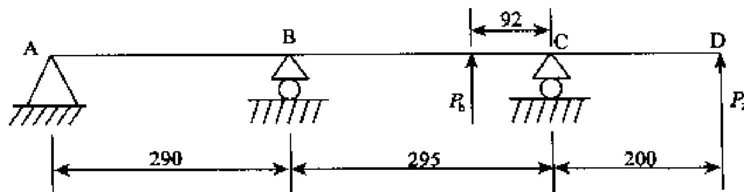


图 10-43

5. 折杆截面为圆形，直径 $d=2\text{cm}, a=0.2\text{m}, l=1\text{m}, P=650\text{N}, E=200\text{GPa}, G=80\text{Gpa}$，如图 10-44 所示。试求 P 力作用点的垂直位移。

6. 已知图 10-45(a)所示圆环受一对径向力时，在 A 截面上的弯矩为 $M_A = PR(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi})$，此弯矩使 A 截面内侧受拉应力。试求图 10-45(b)所示圆环受两对径向力 P 时，A 截面的弯矩为多少？

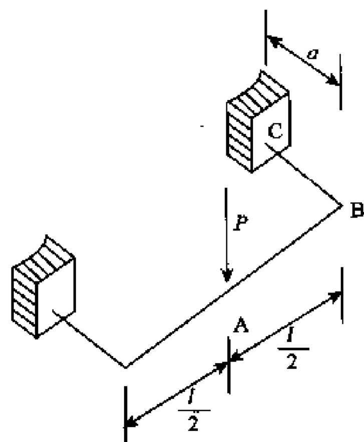
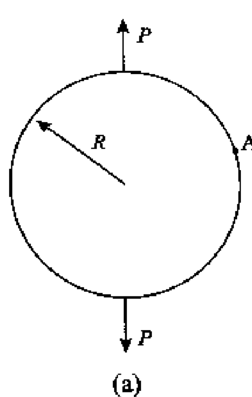
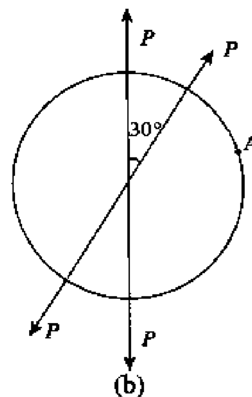


图 10-44



(a)



(b)

图 10-45

第 11 章　动荷载

知识要点

本章主要介绍了动荷载的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)杆件受冲击时的应力和变形；

(2)动载荷系数。

第一节　本章内容总结

1. 动载荷的概念

静载荷是指构件上的载荷从零开始平稳地增加到最终值。因加载缓慢，加载过程中构件上各点的加速度很小，可认为构件始终处于平衡状态，加速度影响可略去不计。

动载荷是指随时间明显变化的载荷，即具有较大加载速率的载荷。一般可用构件中材料质点的应力速率($\dot{\sigma}=\frac{d\sigma}{dt}$)来表示载荷施加于构件的速度。

实验表明，只要应力在比例极限之内，应变与应力关系仍服从胡克定律，因而，通常也用应变速率($\dot{\varepsilon}=\frac{d\varepsilon}{dt}$)来表示载荷随时间变化的速度。

一般认为标准静荷的$\dot{\varepsilon}=(0.01\sim3)/\text{min}$，随着动载荷$\dot{\varepsilon}$的增加，它对材料力学性能的影响越趋明显。对金属材料，静荷范围约在$\dot{\varepsilon}=10^{-4}\sim10^{-2}/s$，如果$\dot{\varepsilon}\geqslant10^{-2}/s$，即认为是动载荷。

2. 三类动载荷问题

根据加载的速度与性质，有三类动荷问题：

(1)一般加速度运动(包括线加速与角加速)构件问题，也称为惯性力问题。此时$\dot{\varepsilon}$还不会引起材料力学性能的改变，该类问题的处理方法是动静法(达朗伯原理)。

(2)冲击问题，构件受剧烈变化的冲击载荷作用。$\dot{\varepsilon}$大约在$1\sim10/s$，它将引起材料力学性能的很大变化，由于问题的复杂性，工程上采用能量法进行简化分析计算。

(3)振动与疲劳问题，构件内各材料质点的应力作用周期性变化。

3. 动应力分析中的动静法

加速度为a的质点，惯性力为其质量m与a的乘积，方向与a相反。达朗伯原理指出，对作加速度运动的质点系，如假想地在每一质点上加上惯性力，则质点系上的原力系与惯性力系组成平衡力系。这样，可把动力学问题在形式上作为静力学问题处理，这就是动静法。

分析要点：

(1)用达朗伯原理求出动载荷系数K_d，即动应力与静应力的比值，即得到动载荷、动位移、动应力和静载荷、静位移、静应力的关系：

$$F_d = K_d \cdot F_{st}, \Delta_d = K_d \cdot \Delta_{st}, \sigma_d = K_d \cdot \sigma_{st}$$

(2)对惯性力问题进行强度计算时，仍用静载荷下的许用应力来建立强度条件：

$\sigma_d \leqslant [\sigma]$

4. 求解冲击问题的能量法

冲击问题极其复杂，难以精确求解。工程中常采用一种较为简略但偏于安全的估算方法——能量法，来近似估算构件内的冲击载荷和冲击应力。

在冲击应力估算中作如下基本假定：

①不计冲击物的变形；②冲击物与构件（被冲击物）接触后无回弹，二者合为一个运动系统；③构件的质量（惯性）与冲击物相比很小，可略去不计，冲击应力瞬时传遍整个构件；④材料服从胡克定律；⑤冲击过程中，声、热等能量损耗很小，可略去不计。

在以上假设下，即可利用机械能守恒定律估算冲击应力。

杆件受冲击时的应力和变形分析方法：

任一被冲击物（弹性杆件或结构）都可简化成弹簧。冲击过程中，设重量为 Q 的冲击物一经与弹簧接触就互相附着共同运动。如省略弹簧的质量，只考虑其弹性，可简化成单自由度的运动体系。

冲击物与弹簧接触瞬间的动能为 T；弹簧达到最低位置时体系的速度变为零，弹簧的变形为 Δ_d，冲击物 Q 的势能变化为：

$$V = Q\Delta_d$$

若以 U_d 表示弹簧的变形能，由能量守恒定律，冲击系统的动能和势能全部转化成弹簧的变形能：

$$T + V = U_d$$

设体系速度为零时冲击物作用在弹簧上的冲击载荷为 P_d。材料服从胡克定律条件下，P_d 与 Δ_d 成正比。故冲击过程中动载荷所做的功为：

$$\frac{1}{2}P_d\Delta_d, \text{且有 } U_d = \frac{1}{2}P_d\Delta_d$$

若重物 Q 以静载方式作用于构件上，构件的静变形和静应力分别为 Δ_{st} 和 σ_{st}。在动载荷 P_d 作用下，相应的冲击变形和冲击应力分别为 Δ_d 和 σ_d。对于线弹性材料，有比例关系：

$$\frac{P_d}{Q} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}}$$

或 $P_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta_{st}}Q$，　　$\sigma_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta_{st}}\sigma_{st}$

结合上面各式解得：$\Delta_d = \Delta_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2T}{Q\Delta_{st}}}\right)$

则冲击动荷系数 k_d：$k_d = \dfrac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2T}{Q\Delta_{st}}}$

(1) $T = 0$ 时，$k_d = 2$，这表明即使冲击物初始速度为零，但只要是突然加于构件上的载荷，其性质也是动载荷，此时构件内的应力和变形分别为静载时的两倍，称为突变载荷。

(2)如果 Δ_{st} 增大，则 k_d 减小，其含义是，构件越柔软（刚性越小），缓冲作用越强。

5. 自由落体冲击的动荷系数

如果冲击是由重物 Q 从高度 h 处自由下落造成的，则冲击开始时，Q 的动能：

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g} \times 2gh = Qh$$

根据上面各式可得：$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$

6. 水平冲击的动荷系数

弹性杆件受到一速度为 v 的重物 Q 的水平冲击时，势能 $V = 0$，动能 $T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2$，于是得 $\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta_d^2}{\Delta_{st}}Q$，解得：

$$\Delta_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}\Delta_{st} = k_d\Delta_{st}$$

其中 $k_d = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}$

由此求得：$P_d = k_dQ = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}Q$，$\sigma_d = k_d\sigma_{st} = \sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{st}}}\sigma_{st}$

7. 提高构件承受冲击能力的途径

(1)尽可能降低 h 值；

(2)在允许的范围内尽量加大构件的长度；

(3)选用弹性模量小的材料，尤其可以在冲击受力点覆盖小弹性模量材料(如塑性材料)；

(4)减少"缺口效应"。

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1)各种冲击工况下动荷系数的计算(能量方法)；

(2)杆件的冲击强度校核。

【例 1】　直径 $d = 20$mm 的圆杆 AB 和直径 $d_1 = 10$mm 的圆杆 CD 的材料相同，E = 200GPa，$[\sigma] = 200$MPa，柔度 $\lambda_p = 100$，稳定安全系数 $n_{st} = 40$ 重量 $G = 20$N，初速度 $v = 0.5$m/s 的重物垂直冲击 AB 梁的 A 端，长度 $l = 100$mm，如图 11-1 所示。试求重物的许可冲击高度 $[h]$。(东南大学，2002 年)

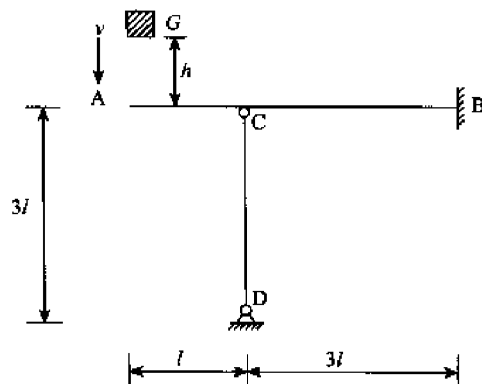


图 11-1

解 当在自由端 A 施加作用力 F 时，设杆 CD 的内力是 N，如图 11-2(a)所示。

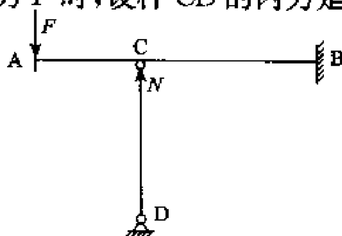


图 11-2(a)

图示一次超静定结构的基本系如图 11-2(b)所示。

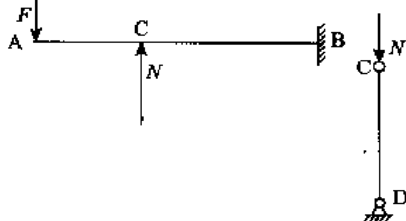


图 11-2(b)

将作用力 F 简化到 C 截面。得到作用力 $F'=F$ 和弯矩 $M=Fl$，如图 11-2(c)所示。

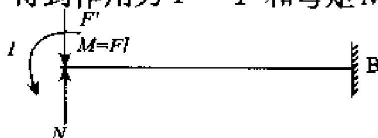


图 11-2(c)

则 C 截面的挠度是：

$$f_c=\frac{(F'-N)(3l)^3}{3EI}+\frac{M(3l)^2}{2EI}$$

$$=\frac{(F-N)(3l)^3}{3EI}+\frac{Fl(3l)^2}{2EI}$$

CD 杆的收缩量是：

$$\Delta l_{CD}=\frac{N\cdot(3l)}{EA}$$

而由原结构的变形协调条件，即 $f_c=\Delta l_{CD}$ 得到：

$$\frac{(F-N)(3l)^3}{3EI}+\frac{Fl(3l)^2}{2EI}=\frac{N\cdot(3l)}{EA}$$

其中 $I=\frac{\pi d^4}{64}$，$A=\frac{1}{4}\pi d_1^2$，

解出 $N=1.5F$

此时，悬臂梁 BC 的 C 截面挠度和转角是：

$$f_c=\frac{(F-N)(3l)^3}{3EI}+\frac{Fl(3l)^2}{2EI}=0$$

$$\theta_c=\frac{(F^1-N)(3l)^2}{2EI}+\frac{Fl\cdot(3l)}{EI}=\frac{3}{4}\cdot\frac{Fl^2}{EI}\text{（沿逆时针方向）}$$

由 C 截面位移引起的 A 截面挠度是：$f_{A1}=0+\theta_c\cdot l=\frac{3}{4}\cdot\frac{Fl^3}{EI}$

同时，由作用力 F 引起的 A 截面挠度是：$f_{A2}=\dfrac{Fl^3}{3EI}$

于是，A 截面挠度是：$f_A=f_{A1}+f_{A2}=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}\right)\cdot\dfrac{Fl^3}{EI}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{Fl^3}{EI}$

即结构的静挠度是：$\Delta_{st}=\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{Fl^3}{EI}$

梁 AB 的弯矩图如图 11-2(d)所示：

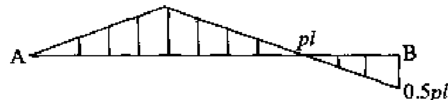


图 11-2(d)

梁中最大应力是：$\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}}{W_z}=\dfrac{pl}{\dfrac{1}{32}\pi d^3}\leqslant[\sigma]=200\text{MPa}$

解出 $P=1570(\text{N})$

杆 CD 的柔度是：$\lambda=\dfrac{\mu\cdot 3l}{I}=\dfrac{1.0\times 3\times 100}{\dfrac{1}{4}\times 10}=120>\lambda_p=100$，属大柔度杆。

其临界内力是：

$N_{cr}=\sigma_{cr}\cdot A=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot\dfrac{1}{4}\pi d_1^2=\dfrac{\pi^2\times 200\times 10^9}{100^2}\times\dfrac{1}{4}\times\pi\times(0.01)^2=10752(\text{N})$

其许可内力是：$[N]=\dfrac{N_{cr}}{n_{st}}=\dfrac{10752}{4}=2688(\text{N})$

由此决定的许可载荷是，$[p]=\dfrac{[N]}{1.5}=1792(\text{N})$ 即 $p=1792(\text{N})$

比较上述两种情况下的许可载荷知道$[p]=1570(\text{N})$

此时的动荷系数是：$k_d=\dfrac{[p]}{G}=\dfrac{1570}{20}=78$

即 $1+\sqrt{1+\dfrac{2H}{\Delta_{st}}}=78$

$H=5928\cdot\dfrac{\Delta_{st}}{2}=2964\times\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{Gl^3}{EI}=2964\times\dfrac{13}{12}\times\dfrac{20\times(0.1)^3}{200\times 10^9\times\dfrac{1}{64}\times\pi\times 0.02^4}$

$=0.04(\text{m})$

由自由落体的相当高度 H 得到许可冲击高度是，

$$[h]=\frac{GH-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{G}{g}\right)V^2}{G}=H-\frac{1}{2}\cdot\frac{V^2}{g}=0.04-\frac{1}{2}\times\frac{0.5^2}{10}=0.028(\text{m})$$

评注：对于带有初速度的冲击问题，读者应将实际冲击高度 h 换算成自由落体冲击高度 H，即 $H=h+\dfrac{V^2}{2g}$。

【例 2】 一刚架水平放置，一重为 Q 的物体突然加在 C 处，已知刚架直径 $d=100\text{mm}$，$a=$

0.3m, b=0.5m, Q=10kN, E=200GPa, μ=0.3，许用应力$[\sigma]$=140MPa。对固定端上表面K点：

(1)画出其单元体的应力状态；

(2)求主应力、主平面并画出主单元体；

(3)用第三强度理论校核K点的强度；

(4)试求K点的主应变ε_1。(西安电子科技大学，2000 年)

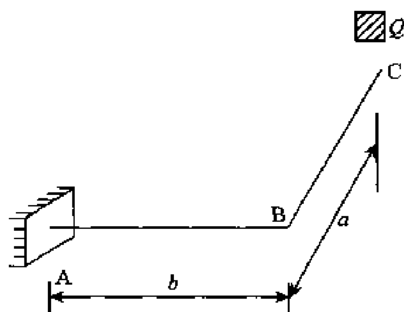


图 11-3

解 (1)从K点取单元体如图 11-4(a)所示，

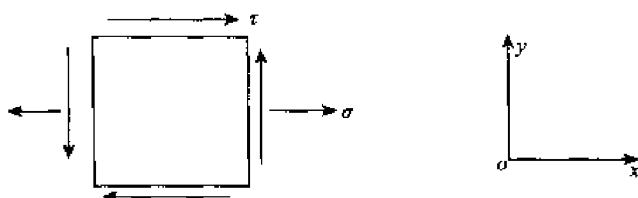


图 11-4(a)

K点的静应力是，

$$\begin{cases}\sigma_{st}=\dfrac{M}{W_z}=\dfrac{Qb}{\dfrac{1}{32}\pi d^3}=\dfrac{32\times10\times10^3\times0.5}{\pi\times(0.1)^3}=51\times10^6(\text{Pa})=51(\text{MPa})\\ \tau_{st}=\dfrac{T}{W_t}=\dfrac{Q_a}{\dfrac{1}{16}\pi d^3}=\dfrac{16\times10\times10^3\times0.3}{\pi\times(0.1)^3}=15.3\times10^6(\text{Pa})=15.3(\text{MPa})\end{cases}$$

对于突加荷载 Q，其动荷系数是：$k_d=1+\sqrt{1+\dfrac{2H}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+0}=2$

于是K点的动应力是，

$$\begin{cases}\sigma=k_d\cdot\sigma_{st}=2\times51=102(\text{MPa})\\ \tau=k_d\cdot\tau_{st}=2\times15.3=30.6(\text{MPa})\end{cases}$$

(2)由主应力计算公式得到主应力是：

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$=\frac{\sigma+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma-0}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{102+0}{2}+\sqrt{\left(\frac{102-0}{2}\right)^2+(30.6)^2}=111(\text{MPa})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{\sigma + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{102 + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{102 - 0}{2}\right)^2 + (30.6)^2} = -8.5(\text{MPa})$$

由主方向计算公式得到主方向是:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \times 30.6}{102 - 0}\right) = -15.5°$$

主单元体如图 11-4(b)所示。

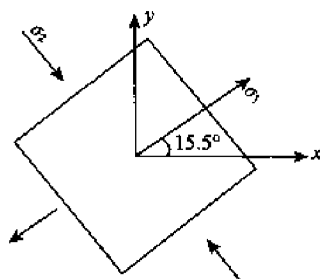


图 11-4(b)

(3)由第三强度理论得:

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 111 - (-8.5) = 119.5(\text{MPa}) < [\sigma] = 140(\text{MPa})$$

所以,结构能满足强度要求。

(4)由广义胡克定律得到 K 点主应变是:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{111 \times 10^6 - 0.3 \times (-8.5 + 0) \times 10^6}{200 \times 10^9}$$

$$= 0.57 \times 10^{-3}$$

评注:突加荷载的动荷系数 $k_d = 2$,读者应记住。

【例 3】 设重量为 Q 的物体,以速度 V 水平冲击到直角刚架的 C 点,试求最大动应力。已知 AB 和 BC 为圆截面杆,直径均为 d,材料的弹性模量为 E。忽略轴力及弯曲剪力的影响。(北京航空航天大学,2002 年)

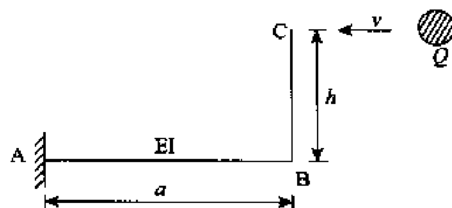


图 11-5

解 当在 C 点作用一个水平力 Q 时,刚架的弯矩图如图 11-6 所示。

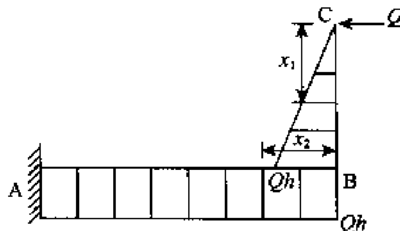


图 11-6

其中 BC 段和 AB 段的弯矩分别是:

$$\begin{cases}M(x_1)=Qx_1 & x_1\in[0,h]\\ M(x_2)=Qh & x_2\in[0,a]\end{cases}$$

其对作用力 Q 的偏导数是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M(x_1)}{\partial Q}=x_1 & x_1\in[0,h]\\ \dfrac{\partial M(x_2)}{\partial Q}=h & x_2\in[0,a]\end{cases}$$

由卡氏定理得到C点的水平位移是：

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{H}}&=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot\int_l M(x)\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial Q}\cdot\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot\left[\int_0^h M(x_1)\cdot\frac{\partial M(x_1)}{\partial Q}\cdot\mathrm{d}x_1+\int_0^a M(x_2)\cdot\frac{\partial M(x_2)}{\partial Q}\cdot\mathrm{d}x_2\right]\\&=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot\left[\int_0^h Qx_1\cdot x_1\cdot\mathrm{d}x_1+\int_0^a Qh\cdot h\cdot\mathrm{d}x_2\right]=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot\left(\frac{1}{3}Qh^3+Qh^2a\right)\end{aligned}$$

即静位移是 $\Delta st=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot(\frac{1}{3}Qh^3+Qh^2a)$

于是得到水平冲击的动荷系数是：

$$k_{\mathrm{d}}=\sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{\mathrm{st}}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{EI}V^2}{g\left(\frac{1}{3}Qh^3+Qh^2a\right)}}=\sqrt{\frac{3\mathrm{EI}V^2}{Qh^2g(h+3a)}}$$

结构的最大静应力是：

$$(\sigma_{\mathrm{st}})_{\max}=\frac{(M_{\mathrm{st}})_{\max}}{W_z}=\frac{Qh}{\frac{1}{32}\pi d^3}=\frac{32Qh}{\pi d^3}$$

最大动应力是：

$$(\sigma_{\mathrm{d}})_{\max}=k_{\mathrm{d}}\cdot(\sigma_{\mathrm{st}})\max=\sqrt{\frac{3\mathrm{EI}V^2}{Qh^2g(h+3a)}}\cdot\frac{32Qh}{\pi d^3}$$

评注：对于水平冲击过程的动荷系数，即 $k_{\mathrm{d}}=\sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{\mathrm{st}}}}$，读者应熟记。

【例4】 如图11-7所示等截面细长杆件，一重量为 P 的物体自C端正上方 H 处自由下落。杆件弯曲部分是半径为 R 的四分之一圆，直杆段长 $a=R$。各段弯曲刚度均是EI。不计杆的质量，不计轴力和横向剪力引起的位移。试求：

(1)C端的垂直静位移 Δ_{st}；

(2)C端的最大垂直冲击位移 Δ_{d}；

(3)杆件所受的最大冲击载荷 P_{d}。(北京航空航天大学，2001年)

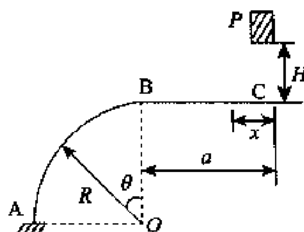


图11-7

解　(1)当C端作用静载 P 时，各节段的弯矩是：

$$\begin{cases} M(x) = Px & x \in [0,a] \\ M(\theta) = Pa(1+\sin\theta) & \theta \in [0,\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

其对作用力 P 的偏导数是：

$$\begin{cases} \frac{\partial M(x)}{\partial P} = x & x \in [0,a] \\ \frac{\partial M(\theta)}{\partial P} = a(1+\sin\theta) & \theta \in [0,\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

由卡氏定理得到C端的垂直静位移是：

$$\begin{aligned} \Delta_{st} &= \int_l \frac{l}{EI} \cdot M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} \cdot dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^a M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\theta) \cdot \frac{\partial M(\theta)}{\partial P} \cdot a \cdot d\theta\right] \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^a Px \cdot x \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pa(1+\sin\theta) \cdot a(1+\sin\theta) \cdot a \cdot d\theta\right] = 4.7\frac{Pa^3}{EI} \end{aligned}$$

(2)结构的动载系数是：

$$k_d = 1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{EIH}{4.7Pa^3}}$$

则C端的最大垂直冲击位移是：

$$\Delta_d = k_d \cdot \Delta_{st} = \left(1+\sqrt{1+\frac{EIH}{4.7Pa^3}}\right) \cdot \frac{4.7Pa^3}{EI}$$

(3)杆件所受到的最大冲击载荷是：

$$P_d = k_d \cdot P = \left(1+\sqrt{1+\frac{EIH}{4.7Pa^3}}\right) \cdot P$$

评注：本题考察动荷系数的基本概念，这一类考题在动荷载的相关考题中占大多数。

【例5】　如图11-8所示的结构，梁中点上方高 h 处有一质量为 m 的小球受重力作用自由落下，冲击于梁中点，已知梁长为 l，抗弯刚度为EI，抗弯截面模量为W，杆AB、CD的长度均为 a，抗拉刚度均为EA。

(1)求动载荷系数 k_d；(2)求梁内最大动应力 σ_d；

(3)若规定动应力不能比静应力大出10倍，问 h 应受何限制？(北京理工大学，2000年)

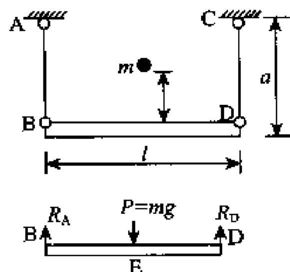


图11-8

解：(1)当静载荷 mg 作用在梁中点E时，

$$R_B = R_D = \frac{1}{2}mg = \frac{P}{2}(\uparrow)$$

对 BD 杆在 BE 段：$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$　$M(x)=\frac{1}{2}mgx=\frac{1}{2}Px,\frac{\partial M(x)}{\partial P}=\frac{x}{2}$

在 ED 段：$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant l$　$M(x)=\frac{P}{2}(l-x)$，　$\frac{\partial M(l-x)}{\partial P}=\frac{l-x}{2}$

故 E 点由于 BD 梁的弯曲产生的位移：

$$\Delta_1=\int_0^l\frac{M(x)}{\mathrm{EI}}\frac{\partial M(x)}{\partial P}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\frac{1}{2}Px}{\mathrm{EI}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^l\frac{\frac{P}{2}(l-x)}{\mathrm{EI}}\frac{l-x}{2}\mathrm{d}x=\frac{Pl^3}{48\mathrm{EI}}$$

由于 AB 和 CD 杆受拉伸长，使得 E 点产生的位移为：$\Delta_2=\frac{R_B\cdot a}{\mathrm{EA}}=\frac{Pa}{2\mathrm{EA}}$

做 E 点的静位移，

$$\Delta_{st}=\Delta_1+\Delta_2=\frac{Pl^3}{48\mathrm{EI}}+\frac{Pa}{2\mathrm{EA}}=mg(\frac{l^3}{48\mathrm{EI}}+\frac{a}{2\mathrm{EA}})$$

动载荷系数：$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{96\mathrm{E}h}{mg\left(\frac{l^3}{\mathrm{I}}+24\frac{a}{\mathrm{A}}\right)}}$

(2)梁的最大弯矩：$M_{max}=\frac{P}{4}l$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{\mathrm{W}}=\frac{\frac{P}{4}l}{\mathrm{W}}=\frac{mgl}{4\mathrm{W}}$$

故最大动应力为：$\sigma_d=k_d\sigma_{max}=\frac{mgl}{4\mathrm{W}}\left[1+\sqrt{1+\frac{q6Eh}{mg\left(\frac{l^3}{\mathrm{I}}+24\frac{a}{\mathrm{A}}\right)}}\right]$

(3)若动应力不能比静应力大出 10 倍，即 $k_d\leqslant10$，即：

$1+\sqrt{1+\frac{96\mathrm{E}h}{mg(\frac{l^3}{I}+\frac{24a}{A})}}\leqslant10$　　　$h\leqslant\frac{5mg(l^3/I+24a/A)}{6\mathrm{E}}=5mg(\frac{l^3+a+24al}{6\mathrm{EIA}})$

【例 6】 如图 11-9 所示结构中，木杆 AB 与钢梁 BC 在端点 B 铰接。长度 $l=1.0$m，木杆 AB 与钢梁 BC 的横截面均为边长 $a=0.10$m 的正方形。钢梁 BC 的弹性模量 $E_g=200$GPa；木杆 AB 的弹性模量 $E_m=10$GPa。D—D 为与 AB 连接的不变形钢杆，当环状重物 $Q=1.2$kN 从 $h=0.01$m 的高度自由落体冲击 D—D 钢杆上时，计算木杆 AD 段和 BD 段的冲击动应力。(武汉大学，2003 年)

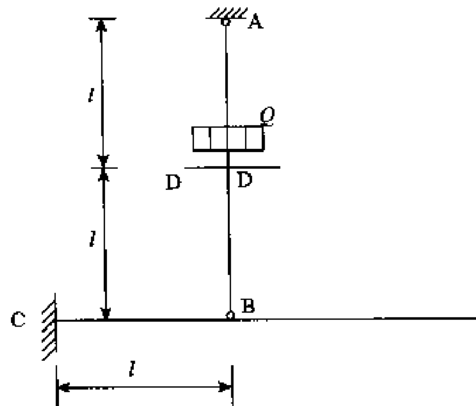


图 11-9

解　当在原结构的 D—D 截面作用静载荷 Q 时，令铰接点 B 的约束力是 N，则原一次超静定结构的基本系如图 11-10 所示。

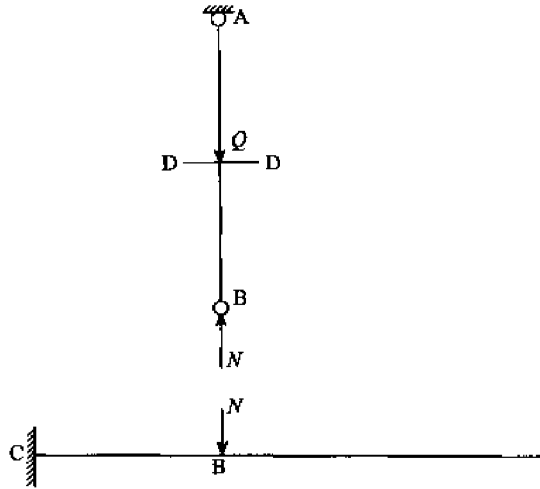


图 11-10

悬臂梁 CB 的 B 截面挠度是：

$f_B = \dfrac{Nl^3}{3E_g I}$（垂直向下）

杆 AB 的伸长量是：

$$\Delta l_{AB} = \frac{(Q-N)l}{E_m A} - \frac{Nl}{E_m A}$$

由变形协调条件，即 $f_B = \Delta l_{AB}$ 得到：

$$\frac{Nl^3}{3E_g I} = \frac{(Q-N)l}{E_m A} - \frac{Nl}{E_m A}$$

代入各相关数据解出 $N=55(\mathrm{N})$

这样，D—D 截面的静位移是：

$$\Delta_{st} = \frac{(Q-N)l}{E_m A} = \frac{(1200-55)\times 1.0}{10\times 10^9 \times 0.1\times 0.1} = 1.2\times 10^{-5}(\mathrm{m})$$

结构的动荷系数是：

$$k_d = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2\times 0.01}{1.2\times 10^{-5}}} = 43$$

AD 段的静应力是：$\sigma_{st} = \dfrac{Q-N}{A} = \dfrac{1200-55}{0.1\times 0.1} = 0.11(\mathrm{MPa})$

其动应力是：

$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{st} = 43\times 0.11 = 4.7(\mathrm{MPa})$

同理可以得到 BD 段的冲击动应力是：

$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{st} = 43\times \dfrac{N}{A} = 43\times \dfrac{55}{0.01} = 0.24(\mathrm{MPa})$

评注：对于冲击问题，静位移 Δ_{st} 的计算占有大部分的计算量，特别是超静定结构的静位移计算。

【例7】 图 11-11 所示带中间铰刚架，横截面是正方形，已知：b、a；材料的弹性模量 E；物重 Q。

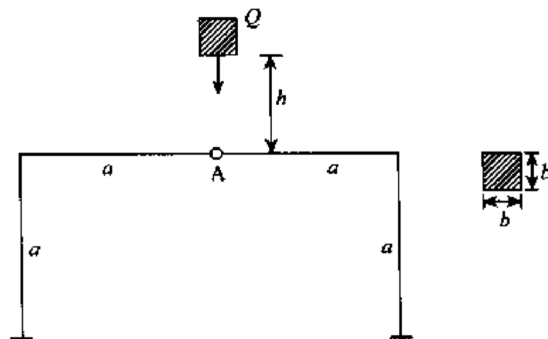


图 11-11

(1)将重物 Q 当作静载荷垂直向下作用于 A 点时，绘制刚架的弯矩图；

(2)求 A 点的垂直位移；

(3)当重物 Q 由高 h 处自由落体向下冲击刚架时，求刚架的最大正应力。(南京航空航天大学，2002 年)

解 (1)设 $F=\dfrac{1}{2}Q$，由结构对称性取半结构分析如图 11-12(a)所示：

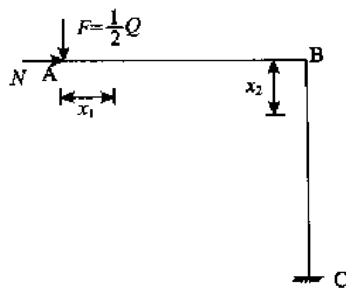


图 11-12(a)

则结构中各节段的弯矩是：

$$\begin{cases}M(x_1)=Fx_1 & x_1\in[0,a]\\ M(x_2)=Fa-Nx_2 & x_2\in[0,a]\end{cases}$$

其对作用力 N，F 的偏导数分别是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M(x_1)}{\partial N}=0 & x_1\in[0,a]\\ \dfrac{\partial M(x_1)}{\partial F}=x_1 & x_1\in[0,a]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial N}=-x_2 & x_2\in[0,a]\\ \dfrac{\partial M(x_2)}{\partial F}=a & x_2\in[0,a]\end{cases}$$

由卡氏定理，A 点的水平位移是：

$$\Delta_H=\frac{1}{EI}\cdot\int_l M(x)\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial N}\cdot dx$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \left[\int_0^a M(x_1) \cdot \frac{\partial M(x_1)}{\partial N} \cdot \mathrm{d}x_1 + \int_0^a M(x_2) \cdot \frac{\partial M(x_2)}{\partial N} \cdot \mathrm{d}x_2\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \left[\int_0^a Fx_1 \cdot 0 \cdot \mathrm{d}x_1 + \int_0^a (Fa \quad Nx_2)(\quad x_2)\mathrm{d}x_2\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot (\frac{Na^3}{3} - \frac{Fa^3}{2})$$

而由结构对称性,A 点水平位移 Δ_H 应该等于零,即

$$\frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot (\frac{Na^3}{3} - \frac{Fa^3}{2}) = 0$$

$$N = \frac{3}{2}F = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}Q = \frac{3}{4}Q$$

这样,刚架的弯矩图如图 11-12(b)所示。

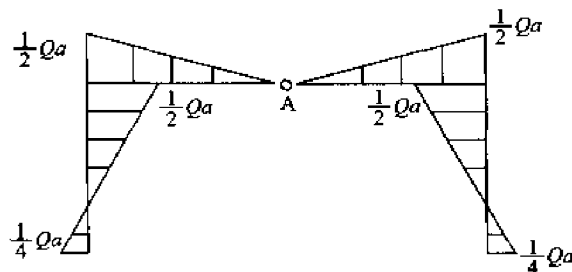


图 11-12(b)

(2)同样,由卡氏定理得到 A 点的垂直位移是:

$$\Delta_v = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \int_l M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} \cdot \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot [\int_0^a M(x_1) \cdot \frac{\partial M(x_1)}{\partial F} \cdot \mathrm{d}x_1 + \int_0^a M(x_2) \cdot \frac{\partial M(x_2)}{\partial F} \cdot \mathrm{d}x_2]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot [\int_0^a Fx_1 \cdot x_1 \cdot \mathrm{d}x_1 + \int_0^a (Fa - Nx_2) \cdot a \cdot \mathrm{d}x_2]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot (\frac{4}{3}Fa^3 - \frac{1}{2}Na^3) = \frac{7}{24} \cdot \frac{Qa^3}{\mathrm{EI}}$$

(3)结构的动荷系数是

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_v}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{48\mathrm{EI}h}{7Qa^3}}$$

刚架的最大静应力是,

$$(\sigma_{st})_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{\frac{1}{2}Qa}{\frac{1}{6} \cdot b^3} = \frac{3Qa}{b^3}$$

所以,刚架的最大动应力是:

$$(\sigma_d)_{max} = k_d \cdot (\sigma_{st})_{max} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{48\mathrm{EI}h}{7Qa^3}}\right) \cdot \frac{3Qa}{b^3}$$

评注:利用结构对称性求其静位移是本题的关键。

【例 8】 直径为 d 的圆截面直角刚架 ABC 与杆 CD(圆截面,直径为 d_0)铰接于 C 点,今有

一重为 Q 的物体，由高度 H 处自由下落冲击 B 点，试校核 CD 杆的安全。已知：材料为钢，$\sigma_b=380\text{MPa}$，$\sigma_s=240\text{MPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，$E=200\text{GPa}$，$G=80\text{GPa}$，$d=50\text{mm}$，$d_0=10\text{mm}$，$l=1\text{m}$，$Q=200\text{N}$，$H=20\text{mm}$，安全系数 $n=2$，稳定安全系数 $n_s=3$。（同济大学，2002 年）

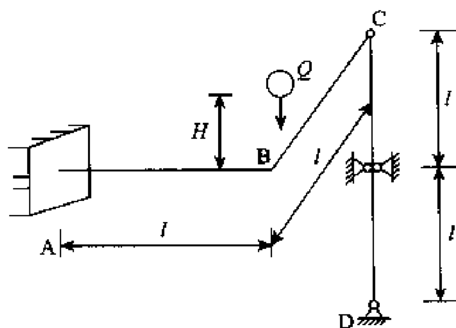


图 11-13

解 设二力杆 CD 的压力是 N，则原一次超静定结构的基本系如图 11-14(a)所示。

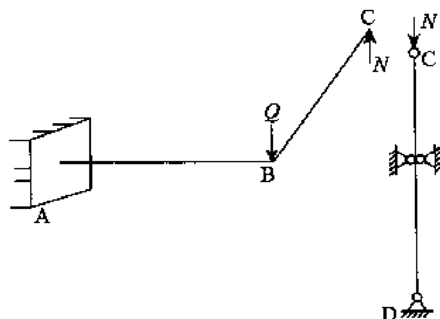


图 11-14(a)

将作用力 N 简化到 B 点得到作用力 $N'=N$ 和扭矩 $T=Nl$ 如图 11-14(b)所示。

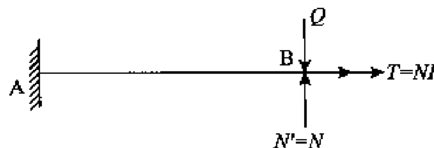


图 11-14(b)

则 B 点的挠度和扭转角是：

$$f_B=\frac{(Q-N')l^3}{3EI}=\frac{(Q-N)l^3}{3EI}\text{（垂直向下）}$$

$$\theta_B=\frac{Tl}{GI_p}=\frac{Nl\cdot l}{GI_p}\text{（沿逆时针方向）}$$

由 B 点位移引起的 C 点位移是：

$$f_{c1}=f_B-\theta_B\cdot l=\frac{(Q-N)l^3}{3EI}-\frac{Nl^3}{GI_p}\text{（垂直向下）}$$

而由作用力 N 引起的 C 点位移是：

$$f_{c2}=\frac{Nl^3}{3EI}$$

于是，C 点的挠度是：

$$f_c = f_{c1} - f_{c2} = \frac{(Q-N)l^3}{3EI} - \frac{Nl^3}{GIp} - \frac{Nl^3}{3EI} \text{（垂直向下）}$$

CD 杆的压缩量是，

$$\Delta l_{CD} = \frac{N \cdot 2l}{EA}$$

根据原结构的变形协调条件，即 $f_c = \Delta l_{CD}$ 得到：

$$\frac{(Q-N)l^3}{3EI} - \frac{Nl^3}{GI_p} - \frac{Nl^3}{3EI} = \frac{N \cdot 2l}{EA}$$

从中解出 $N=35(N)$

结构的静挠度是：

$$\Delta_{st} = \frac{(Q-N)l^3}{3EI} = \frac{(200-35)\times 1^3}{2\times 200\times 10^9 \times \frac{1}{64}\times \pi \times (0.05)^4} = 0.001(m) = 1(mm)$$

结构的动荷系数是，

$$K_d = 1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2\times 20}{1}} = 8$$

杆 CD 的动内力是：

$$N_d = K_d \cdot N = 8\times 35 = 280(N)$$

CD 杆的柔度是：

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1.0\times 1.0}{\frac{1}{4}\times (0.01)} = 400 > \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200\times 10^9}{200\times 10^6}} = 100 \text{，属大柔度杆。}$$

其临界内力是：

$$N_{cr} = \sigma_{cr}\cdot A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot \frac{1}{4}\pi d_0^2 = \frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{100^2}\times \frac{1}{4}\times \pi \times (0.01)^2 = 1000(N)$$

CD 杆的实际稳定安全系数是：

$$n = \frac{N_{cr}}{N_d} = \frac{1000}{280} = 3.6 > n_s = 3 \text{，稳定性满足要求。}$$

评注：由于 CD 杆无削弱截面，故不需要对其进行强度校核，读者请注意。

【例 9】 如图 11-15 所示，高 h，宽 b 的矩形截面梁 ABC，材料的弹性模量为 E，在 BC 中部受重力为 Q 的物体自由落体冲击，求最大工作应力。（南京航空航天大学，2000 年）

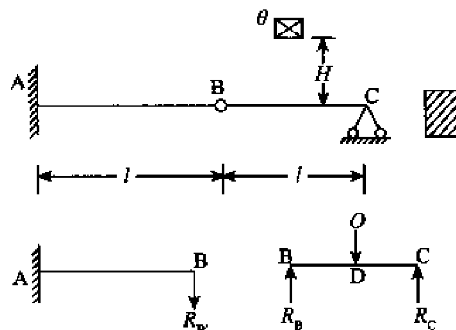


图 11-15

解 当静载荷 Q 作用在 BC 杆中部时，

各段内力为：AB 段：$0\leqslant x\leqslant l$

$$M(x)=-\frac{Q}{2}(l-x),\frac{\partial M(x)}{\partial Q}=\frac{l-x}{2}$$

BC 段：$l\leqslant x\leqslant \frac{3l}{2}$

$$M(x)=\frac{Q}{2}(x-l),\frac{\partial M(x)}{\partial Q}=-\frac{x-l}{2}$$

DC 段：$\frac{3l}{2}\leqslant x\leqslant 2l$

$$M(x)=\frac{Q}{2}(2l-x),\frac{\partial M(x)}{\partial Q}=-\frac{2l\quad x}{2}$$

则 D 点的静位移：

$$\Delta_{st}=\int_0^l \frac{-\frac{Q}{2}(l-x)}{EI}\cdot(-\frac{l-x}{2})dx+\int^{\frac{3l}{2}} \frac{\frac{Q}{2}(x-1)}{EI}\cdot\frac{x-l}{2}dx$$

$$+\int_{3l/2}^{2l} \frac{\frac{Q}{2}(2l-x)}{EI}\cdot\frac{2l-x}{2}dx=\frac{5Ql^3}{48EI}$$

$$k_d=1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{96EIH}{5ql^3}}$$

静载作用下，最大弯矩

$$M_{max}=\frac{Ql}{2}$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{Ql/2}{bh^2/6}=\frac{3Ql}{bh^2}$$

故在冲击载荷作用下的最大工作应力为：

$$(\sigma_d)_{max}=K_d\sigma_{max}=\frac{3Ql}{bh^2}(1+\sqrt{1+\frac{96EIH}{5Ql^3}})。$$

第三节 习 题

一、填空题

1. 若弹簧在 Q 作用下的静位移 $\Delta_{st}=20$mm，在 Q 自由下落冲击时的最大动位移 $\Delta_d=60$mm，则弹簧所受的最大冲击力 P_d 为________。

2. 如图 11-16 所示，梁在突加载荷 Q 作用下其最大弯矩 $M_{dmax}=$________。

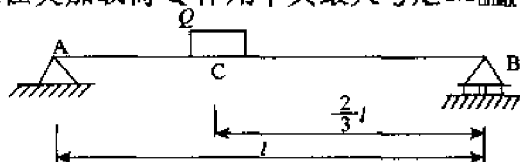


图 11-16

3. 如图 11-17 所示二梁受冲击载荷作用，二梁的截面、材料均相同，长度及冲击点如图所示，二梁在冲击下，最大弯曲正应力________。（填“相等”或“不相等”）

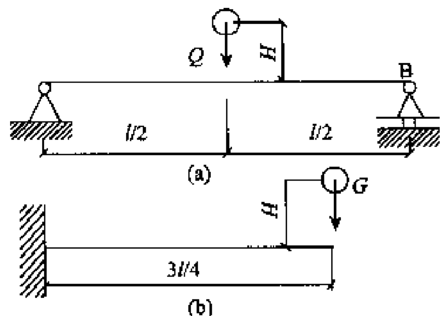


图 11-17

二、选择题

1. 边长为 d 的正方形截面杆(1)和(2)，杆(1)是等截面，杆(2)为变截面，如图 11-18 所示。两杆受同样的冲击载荷作用。对于这两种情况的动荷系数 kd 和杆内最大动荷应力 σ_{dmax}，有下列结论：________。

A、$(k_d)_1<(k_d)_2$，$(\sigma_{dmax})_1<(\sigma_{dmax})_2$

B、$(k_d)_1<(k_d)_2$，$(\sigma_{dmax})_1>(\sigma_{dmax})_2$

C、$(k_d)_1>(k_d)_2$，$(\sigma_{dmax})_1<(\sigma_{dmax})_2$

D、$(k_d)_1>(k_d)_2$，$(\sigma_{dmax})_1>(\sigma_{dmax})_2$

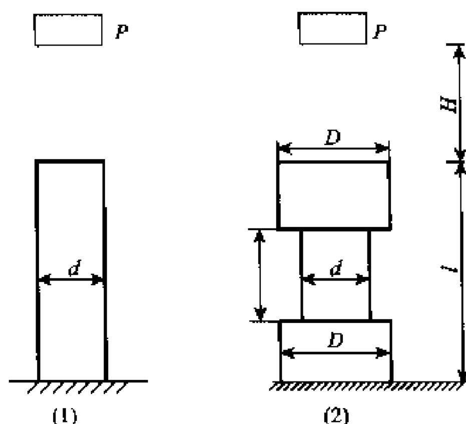


图 11-18

2. 构件作均变速直线运动时，关于其动应力和相应的静应力之比，即动载荷系数 k_d 有如下结论：________。

A. 等于 1　　B. 不等于 1　　C. 恒大于 1　　D. 恒小于 1

3. 在冲击应力和变形实用计算的能量法中，因为不计被冲击物的质量，所以计算结果与实际情况相比，________。

A. 冲击力偏大，冲击变形偏小

B. 冲击力偏小，冲击变形偏大

C. 冲击力和变形均偏大

D. 冲击力和变形均偏小

4. 自由落体冲击时，当冲击物质重量 Q 增加一倍时，若其他条件不变，则被冲击结构的动应力______。

A. 不变　　B. 增加一倍

C. 增加不足一倍　　D. 增加一倍以上

5. 对水平冲击情况，当杆长由 L 变为 $2L$，横截面面积由 A 变为 $0.5A$ 时，杆的冲击应力 σ_d 和冲击变形 Δ_d 变化情况是______。

A. σ_d 增大，Δ_d 不变　　B. σ_d 不变，Δ_d 增大

C. σ_d 和 Δ_d 增大　　D. σ_d 和 Δ_d 不变

6. 如图 11-19 所示 a、b 两梁除右支座不同外，其他条件均相同，重物自高 h 处自由下落，冲击中点 C，a 梁最大冲击正应力为 $\sigma_{max \cdot a}$，b 梁最大冲击正应力为 $\sigma_{max \cdot b}$，则：______。

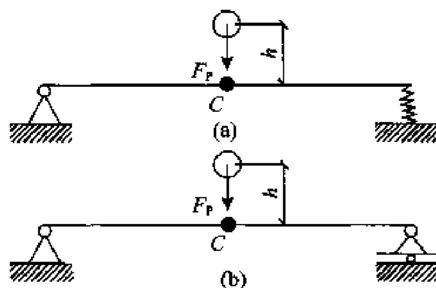


图 11-19

A. $\sigma_{max \cdot a} > \sigma_{max \cdot b}$　　B. $\sigma_{max \cdot a} < \sigma_{max \cdot b}$

C. $\sigma_{max \cdot a} = \sigma_{max \cdot b}$　　D. $\sigma_{max \cdot a}$ 与 $\sigma_{max \cdot b}$ 关系不确定

三、判断题

1. 如图 11-20 所示三杆材料相同，受到重量、速度相同的重物 G 的轴向冲击，(a)杆冲击应力最小。(　　)

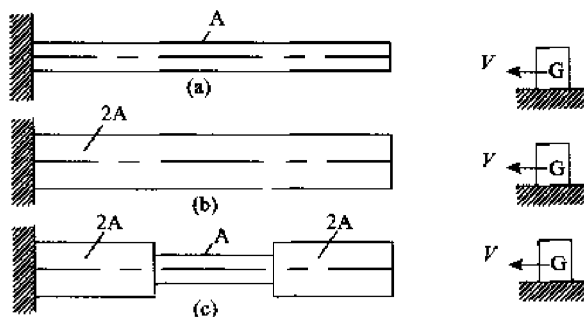


图 11-20

四、计算题

1. 如图 11-21 所示矩形截面刚梁，A 端是固定铰支座，B 端为弹簧支撑。在该梁的中点 C

处受到的重量为 $P=40\text{N}$ 的重物，自高度 $h=60\text{mm}$ 处自由落下冲击到梁上。已知弹簧刚度 $k=25.32\text{N/mm}$，钢的 $E=210\text{GPa}$，求梁内最大冲击应力(不计梁的自重)。

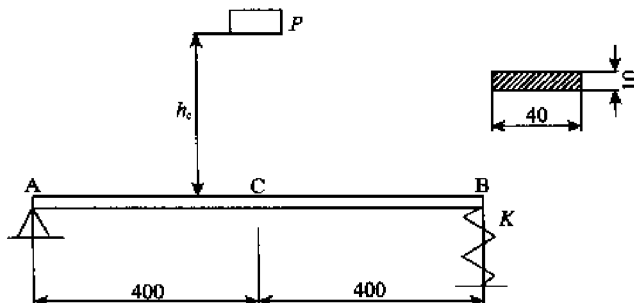


图 11-21

2. 已知 AB 杆的 EI 和 W，弹簧刚度 k，重物 D 与弹簧接触时的水平速度为 v，如图 11-22 所示，求 AB 杆内最大正应力。

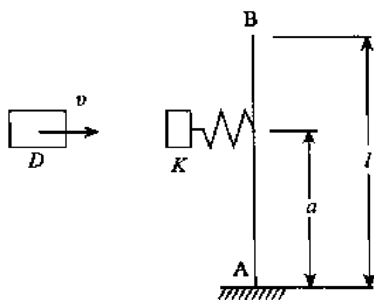


图 11-22

3. 某发动机排气阀的圆柱螺旋弹簧，其平均直径 $D=60\text{mm}$，圈数 $n=10$，簧丝直径 $d=6\text{mm}$，弹簧材料的 $\sigma_b = 1300\text{MPa}$，$\tau_b = 800\text{MPa}$，$\tau_s = 500\text{MPa}$，$\tau_{-1} = 300\text{MPa}$，$G = 80\text{MPa}$。弹簧在预压缩量 $\lambda_1 = 40\text{mm}$ 和最大压缩量 $\lambda_{max} = 90\text{mm}$ 范围内工作。若取 $\beta = 1$，试求弹簧的工作安全系数。

4. 重物 Q 通过轴承对圆轴作用一垂直方向的力 $Q = 10\text{kN}$，而轴在 $\pm 30^\circ$ 范围内往复摆动，如图 11-23 所示。已知材料的 $\sigma_b = 600\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 250\text{MPa}$，$\sigma_s = 340\text{MPa}$，$\psi_\sigma = 0.1$。对危险截面上的点 1,2,3,4，试求：(1)应力变化的循环特征；(2)工作安全系数。

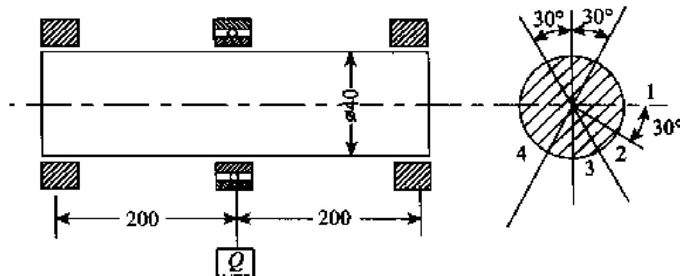


图 11-23

5. 如图 11-24 所示机车车轮以 $n = 300\text{r/min}$ 转的速旋转，平行杆 AB 的横截面为矩形，h

$=5.6\text{cm}$，$b=2.8\text{cm}$，长度 $l=200\text{cm}$，$r=25\text{cm}$，材料的密度 $\gamma=7.8\text{g/cm}^3$，试确定平行杆最危险的位置和杆内最大正应力。

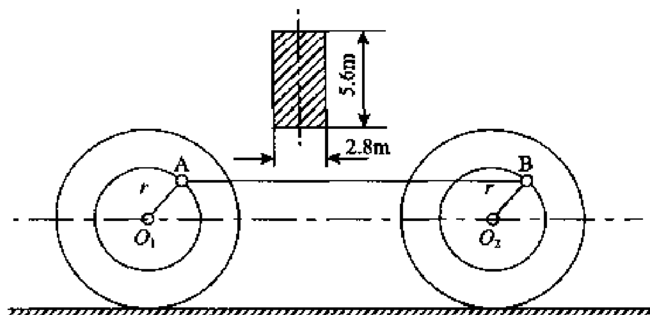


图 11-24

6. 桥式起重机上悬挂一重量 G=50kN 的重物，以均匀速度 $v=1\text{m/s}$ 向前移，如图 11-25 所示。当起重机突然停止时，重物像单摆一样向前摆动，若梁为 14 号工字钢，吊索横截面面积 $A=5\times10^{-4}\text{m}^2$，问此时吊索内及梁内的最大应力增加多少？设吊索的自重以及由重物摆动引起梁的斜弯影响都忽略不计。

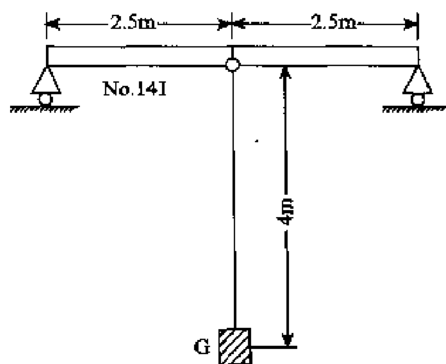


图 11-25

第 12 章　交变应力

知识要点

本章主要介绍了交变应力的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)疲劳失效；

(2)交变应力的循环特征、应力幅和平均应力；

(3)持久极限以及影响因素；

(4)持久极限曲线。

第一节　本章内容总结

1. 基本概念

(1)交变应力

构件内随时间作周期性变化的应力，称为交变应力。

(2)疲劳与疲劳失效

结构的构件或机械、仪表的零部件在交变应力作用下发生的破坏现象，称为疲劳失效，简称疲劳。

构件在交变应力作用下失效时，具有如下特征：

①破坏时的名义应力值往往低于材料在静载作用下的屈服应力；

②构件在交变应力作用下发生破坏需要经历一定数量的应力循环；

③构件在破坏前没有明显的塑性变形预兆，即使塑性材料，也将呈现“突然”的脆性断裂；

④金属材料的疲劳断裂断口上，有明显的光滑区域与颗粒区域。光滑区是裂纹扩展区域，其上有裂纹源；粗糙区是最后脆性断裂的区域。

疲劳失效的机理：

交变应力引起金属原子晶格的位错运动→位错运动聚集，形成分散的微裂纹→微裂纹沿结晶方向扩展(大致沿最大剪应力方向形成滑移带)、贯通形成宏观裂纹→宏观裂纹沿垂直于最大拉应力方向扩展，宏观裂纹的两个侧面在交变载荷作用下，反复挤压、分开，形成断口的光滑区→突然断裂，形成断口的颗粒状粗糙区。

(3)应力循环

应力大小经历了一个全过程变化又回到原来的数值，称为一个应力循环。完成一个应力循环所需的时间 T，称为一个周期。

(4)循环特征或应力比

一个应力循环中最小应力 σ_{min} 与最大应力 σ_{max} 的比值：$r=\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ 称为交变应力的循环特征或应力比。

(5)平均应力

σ_{max} 与 σ_{min} 的代数平均值，即 $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$ ，称为平均应力。

(6)应力幅

最大应力与最小应力之差的一半，即 $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ ，σ_a不随时间变化的交变应力称恒幅交变应力，否则称变幅交变应力。

2. 对称循环与脉动循环

如果 σ_{max} 与 σ_{min} 大小相等、符号相反，此时的应力循环称为对称循环。对称循环有如下特点：

$r = -1, \sigma_m = 0, \sigma_a = \sigma_{max}$

若应力循环中 $\sigma_{min} = 0$（或 $\sigma_{max} = 0$），表示交变应力变动于某一应力与零之间，这种情况称为脉动循环，这时有：

$r = 0, \sigma_a = \sigma_m = \frac{1}{2}\sigma_{max}$ 或：$r = -\infty, -\sigma_a = \sigma_m = \frac{1}{2}\sigma_{min}$

交变应力的特例——静应力：这时应力并无变化，有 $r = 1, \sigma_a = 0, \sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_m$

3. 持久极限

标准试件经过无穷多次应力循环而不发生破坏时的最大应力值，称为该材料的持久极限。持久极限也称疲劳极限。

条件持久极限：规定标准试件在一定循环次数下不破坏时的最大应力，称为条件持久极限（或名义持久极限）。

4. 应力寿命曲线

表示一定循环特征下标准试件的疲劳强度与疲劳寿命之间关系的曲线，称应力寿命曲线，也称 $S-N$ 曲线。

$S-N$ 曲线是通过专用疲劳试验机，用若干光滑小尺寸专用标准试件测试而得。试件分为若干组，各组承受不同的应力水平，使最大应力值由高到低，让每组试件经历应力循环，直至破坏。记录每根试件中的最大应力 σ_{max}（名义应力，即疲劳强度）及发生破坏时的应力循环次数（又称寿命）N ，即可得 $S—N$ 应力寿命曲线，如图 12-1 所示。

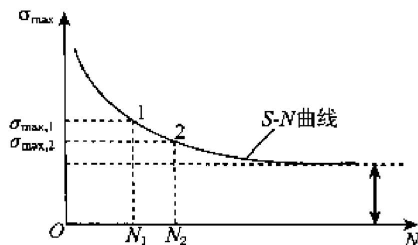


图 12-1

5. 影响持久极限的因素

对称循环的持久极限用 σ_{-1} 表示。通常针对 σ_{-1}，研究影响持久极限的主要因素。

1)构件外形的影响

构件外形的突变(槽、孔、缺口、轴肩等)引起应力集中。应力集中区易引发疲劳裂纹，使持久极限显著降低。用有效应力集中系数 k_σ 或 k_τ 描述外形突变的影响：

$$k_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_k} \text{或} \ k_\tau = \frac{(\tau_{-1})_d}{(\tau_{-1})_k}$$

其中：$(\sigma_{-1})_d$ 或 $(\tau_{-1})_d$ 是无应力集中的光滑试件的持久极限，$(\sigma_{-1})_k$ 或 $(\tau_{-1})_k$ 是有外形突变试件的持久极限。

工程中已将 k_σ 或 k_τ 的数值整理成曲线或表格。此处 k_σ、k_τ 可分别表示弯曲与扭转的情况。

因 $(\sigma_{-1})_d > (\sigma_{-1})_k$，$(\tau_{-1})_d > (\tau_{-1})_k$

故有 $k_\sigma > 1$，$k_\tau > 1$

2)构件尺寸的影响

持久极限是用小试件测定的，实际构件尺寸较大。研究表明，尺寸越大，持久极限越低。理由如下：

对于受扭转的大、小两圆筒截面试件，如两者的最大剪应力相同，则大试件横截面上的高应力区比小试件的大。即大试件中处于高应力状态的晶粒比小试件的多，故引发疲劳裂纹的机会也多。

光滑小试件对称循环下的持久极限为 σ_{-1}，光滑大试件的持久极限为 $(\sigma_{-1})_d$，则比值为：

$\varepsilon_\sigma = \dfrac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}}$ (称为尺寸系数)

对扭转，尺寸系数为：$\varepsilon_\tau = \dfrac{(\tau_{-1})_d}{\tau_{-1}}$

显然有 $\varepsilon_\sigma < 1$，$\varepsilon_\tau < 1$。对给定尺寸的大试件，ε_σ 或 ε_τ 可以从有关表格中或曲线图查得。

3)构件表面质量的影响

构件上的最大应力常发生于表层，疲劳裂纹也多生成于表层。故构件表面的加工缺陷(划痕、擦伤)等将引起应力集中，降低持久极限。为计及表面加工质量对持久极限的影响，引入表面质量系数 β：

$$\beta = \frac{(\sigma_{-1})_\beta}{(\sigma_{-1})_d}$$

其中，$(\sigma_{-1})_d$ 是表面磨光试件的持久极限，$(\sigma_{-1})_\beta$ 为其他加工情形时的构件持久极限。如表面加工质量低于磨光试件时，$\beta < 1$。不同表面粗糙度的表面质量系数 β 可以从有关表格或曲线图中查得。

综合上述三种因素，对称循环下承受正应力构件的持久极限为：$\sigma_{-1}^0 = \dfrac{\varepsilon_\sigma \beta}{k_\sigma}\sigma_{-1}$

如构件承受的是剪应力，则有：$\tau_{-1}^0 = \dfrac{\varepsilon_\tau \beta}{k_\tau}\tau_{-1}$，其中，$\sigma_{-1}$，$\tau_{-1}$ 是光滑小试件的持久极限。除此之外，构件工作环境(如温度介质等)也会对其构件持久极限有影响。

6. 持久极限曲线

循环特征为 r 的非对称循环，用 σ_r 表示持久极限。通过疲劳实验可求得不同循环特征 r 下的 $S-N$ 曲线如图 12-2 所示。利用 $S-N$ 曲线，如对碳钢试件，在 $N=10^7$ 处（虚线）可得到不同 r 下的 σ_r 。

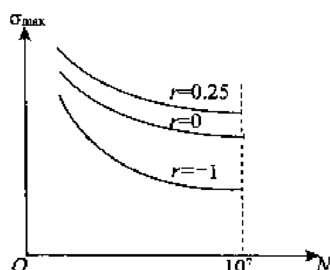


图 12-2

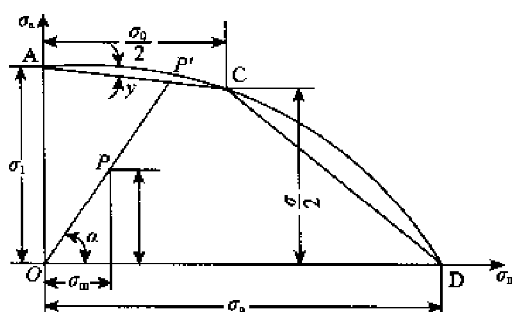


图 12-3

若建立以平均应力 σ_m 为横轴，应力幅 σ_a 为纵轴的坐标系，则由图 12-2 中的 r 与 σ_r 可以求得相应的 σ_m 与 σ_a，进而画出图 12-3 所示的持久极限曲线 ACB 。此曲线与坐标轴围成一个不发生疲劳破坏的交变应力范围。如现有一应力循环 $P(\sigma_m,\sigma_a)$

$$\sigma_a+\sigma_m=\sigma_{max}$$

射线 OP 的斜率为：$\tan\alpha=\dfrac{\sigma_a}{\sigma_m}=\dfrac{\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})}{\frac{1}{2}(\sigma_{max}+\sigma_{min})}=\dfrac{1-r}{1+r}$

由上式可知，同一射线上的点具有相同的循环特征 r 。对给定的 r，如果 $\sigma_{max}<\sigma_r$，则不会出现疲劳失效。故 OP 射线上存在一个由持久极限 σ_r 确定的临界点 P' 。

将不同 r 下的持久极限临界点连接起来，即可得到如图 12-3 所示的持久极限曲线。现考察该曲线 ACB 上几个特殊点：

A 点：$\alpha=90^\circ,\sigma_m=0,\sigma_a=\sigma_{max},r=-1$，故该点对应对称循环的持久极限 σ_{-1} 。

B 点：$\alpha=0^\circ,\sigma_m=\sigma_{max},\sigma_a=0,r=+1$，故该点对应静载的强度极限 σ_b。

C 点：$\alpha=45^\circ,\tan\alpha=1,\sigma_m=\sigma_a=\dfrac{\sigma_{max}}{2},r=0$，故该点对应脉动循环的持久极限 σ_0 。

工程中，常用折线 ACB 简化代替原来的持久极限曲线。这样只要由实验确定相应于对称循环、脉动循环与静荷的 A、C、B 三点即可。设 AC 的倾角为 γ，则有：

$$\psi_\sigma=\tan\gamma=\frac{\sigma_{-1}-\dfrac{\sigma_0}{2}}{\sigma_0/2}$$

AC 上的点（σ_{rm},σ_{ra}）都与持久极限 σ_r 对应，AC 直线的方程为：

$\sigma_{ra}=\sigma_{-1}-\psi_\sigma\sigma_{rm}$，系数 ψ_σ 称为敏感系数，与材料和构件的加载方式有关。

7. 构件的疲劳强度计算

(1)对称循环下，构件的疲劳强度条件为：$\sigma_{max}\leqslant[\sigma_{-1}]=\dfrac{\sigma_{-1}^0}{n}$

其中：$\sigma_{\max}$ 是构件危险点的最大工作应力；n 为构件的规定疲劳安全系数。上式也可表达为：$\frac{\sigma_{-1}^{0}}{\sigma_{\max}} \geqslant n$ ，则强度条件可表达为：$n_{\sigma} \geqslant n$ ，$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}^{0}}{\sigma_{\max}}$ 代表构件的疲劳工作安全系数。将 σ_{-1}^{0} 的表达式代入 n_{σ} 的表达式，有：

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta}\sigma_{\max}} \geqslant n$$

对扭转交变应力有：$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}\beta}\tau_{\max}} \geqslant n$

(2)非对称循环时的强度条件为：

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta}\sigma_{\max} + \psi_{\sigma}\sigma_{m}} \geqslant n$$

式中 ψ_{σ} 称为敏感系数，与材料和构件的加载方式有关。

(3)弯扭组合疲劳强度条件

$$n_{\sigma\tau} = \frac{n_{0} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^{2} + n_{\tau}^{2}}} \geqslant n$$

式中 $n_{\sigma\tau}$ 为交变正应力与交变切应力组合时构建的实际安全系数；n_{σ} ，n_{τ} 分别为只有交变正应力和只有交变切应力时的实际安全系数。

8. 提高构件疲劳强度的措施

疲劳裂纹主要形成于构件表面和应力集中部位，故提高疲劳强度应从以下方面着手：

(1)减缓应力集中：设计构件外形时，避免方形或带有尖角的孔和槽，在截面突变处采用足够大的过渡圆角等。

(2)降低表面粗糙度及避免使构件表面受到机械损伤或化学损伤(如腐蚀等)。

(3)增加表层强度：可采用高频淬火等热处理，渗碳、氮化等化学处理和机械方法(如喷丸等)强化表层，以提高疲劳强度。

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1)交变应力的循环特征相关概念；

(2)影响构件持久极限的主要因素；

(3)持久极限曲线的定义。

【例 1】　如图 12-4，在 $\sigma_{a}-\sigma_{m}$ 坐标系中(σ_{a} 为交变应力的幅度，σ_{m} 为平均应力)，C_1、C_2 两点均位于一条过原点 O 的直线上，设 C_1、C_2 两点对应的两个应力的循环特征为 γ_1、γ_2，最大应力分别为 $\sigma_{\max1}$、$\sigma_{\max2}$，则________。(哈尔滨工业大学，1999 年)

A. $\gamma_1 = \gamma_2 \quad \sigma_{\max1} > \sigma_{\max2}$　　　　B. $\gamma_1 = \gamma_2 \quad \sigma_{\max1} < \sigma_{\max2}$

C. $\gamma_1 \neq \gamma_2 \quad \sigma_{max1} > \sigma_{max2}$　　　　　　　　D. $\gamma_1 \neq \gamma_2 \quad \sigma_{max1} < \sigma_{max2}$

解　在射线 OC_2 上，$\sigma_a + \sigma_m = \sigma_{max} \quad \tan\alpha = \dfrac{\sigma_a}{\sigma_m} = \dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$

因 C_1、C_2 的循环特征相同，且 C_2 的最大应力比 C_1 的大，故应选 B。

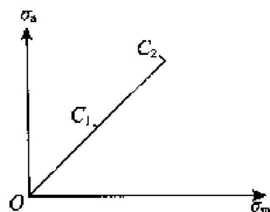


图 12-4

【例 2】 疲劳破坏原因是材料经长期工作后，材料起了变化，即质变了，因而导致骤然断裂，这种说法妥否？试解释之。（中南工业大学，2000 年）

解　这种说法不妥。受交变应力作用的构件，因为表面上存在机械划痕，结构上存在内圆角、孔、缺口或突变截面或材料内部的缺陷，从而形成局部应力集中区，引起微裂纹，在交变应力作用下逐渐扩展，随着裂纹的扩展，构件截面逐步削弱，到一定极限时构件便突然断裂。

【例 3】 当交变应力的________不超过材料疲劳极限时，试件可经历无限次应力循环，而不发生疲劳破坏。（哈尔滨工业大学 2000 年试题）

A. 应力幅度　　B. 最小应力　　C. 平均应力　　D. 最大应力

解　D。

第三节　习　题

一、简答题

什么是疲劳破坏？

二、填空题

1. 影响实际构件持久极限的因素通常有________、________、________，它们分别用________、________、________来加以修正。

2. 提高构件疲劳强度的主要措施有：________、________、________。

3. 塑性材料和脆性材料中，________对应力集中更为敏感。（西安电子科技大学，2000 年）

三、选择题

1. 受 P 力作用的圆轴，如图 12-5 所示，在 $\alpha = \pm 30°$ 范围内往复转动，则跨中某横截面上 B 点的应力循环有四种答案，________。

A. 对称循环　　B. 脉动循环　　C. 非脉动循环　　D. 静载

2. 图 12-6 所示静止的圆截面梁，受到与铅垂轴 y 夹角 $\pm 30°$ 的往复运动载荷 F_P 的作用。危险截面上有 1、2、3、4 四个点，这四个点中应力循环特性 $r = 0$ 的点是：________。

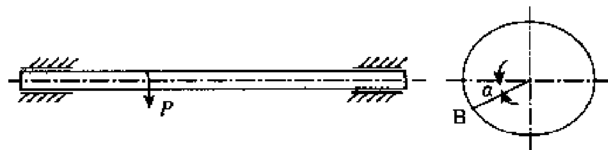


图 12-5

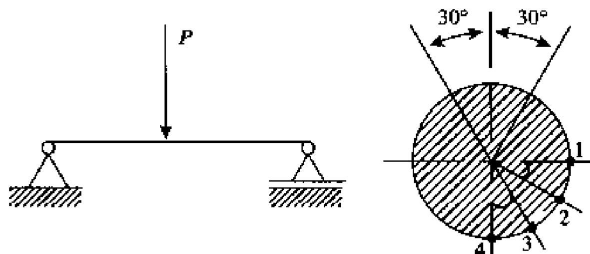


图 12-6

A. 点 1　　　　B. 点 2　　　　C. 点 3　　　　D. 点 4

3. 构件内某点处交变应力的"$\sigma-t$"曲线如图 12-7 所示，r 表示循环特征，以 σ_m 表示平均应力，以 σ_a 表示应力幅度，σ_{max}、σ_{min} 分别表示最大、最小应力，则该循环为：________。

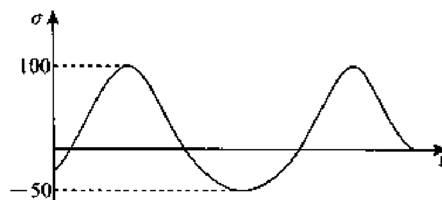


图 12-7

A、$r=0.5$，$\sigma_m=25\text{MPa}$，$\sigma_a=75\text{MPa}$

B、$r=-0.5$，$\sigma_{max}=100\text{MPa}$，$\sigma_a=0$

C、$\sigma_{max}=100\text{MPa}$，$\sigma_{min}=50\text{MPa}$，$\sigma_a=75\text{MPa}$

D、$\sigma_a=75\text{MPa}$，$\sigma_m=25\text{MPa}$，$\sigma_{max}=100\text{MPa}$

四、计算题

试在 $\sigma_m-\sigma_a$ 直角坐标中，标出如图 12-8 所示各种变应力状态的点，并计算它们的循环特征值 r。

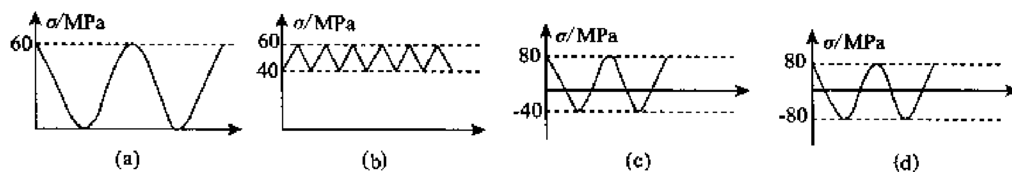


图 12-8

第 13 章 压杆稳定

知识要点

本章主要介绍了压杆稳定的相关知识，是历年考研必考之内容。主要内容包括：

(1)两端铰支细长压杆的临界压力；

(2)其他支撑条件下的临界压力；

(3)欧拉公式的适用范围；

(4)压杆的稳定校核。

第一节 本章内容总结

1. 稳定平衡的概念

若处于平衡的构件，当受到一微小的干扰力后，构件偏离原平衡位置，而干扰力解除以后，又能恢复到原平衡状态时，这种平衡称为稳定平衡。由稳定平衡过渡到不稳定平衡的压力的临界值称为临界压力(或临界力)，用 P_{cr}表示。

2. 细长压杆临界压力的欧拉公式

两端铰支细长压杆的临界压力选取如图 13-1 所示，坐标系 xoy。距原点为 x 的任意截面的挠度为 y，弯矩 M 的绝对值为 P_y。

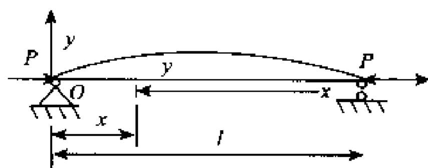


图 13-1

若压力 P 取绝对值，则 y 为正时，M 为负。即 M 与 y 的符号相反，于是有：$M(x) = -Py$

将其代入弹性挠曲线近似微分方程，则得：$EIy'' = M(x) = \quad Py$

令 $k^2 = \dfrac{P}{EI}$，则有：$y'' + k^2 y' = 0$

该微分方程的通解为：$y = C_1 \cos kx + D_1 \sin kx$，式中 C_1、D_1 -- 积分常数，可由边界条件确定。

压杆为球铰支座提供的边界条件为：$x = 0$ 时，$y = 0$；$x = l$ 时，$y = 0$

将其代入通解式，可解得 $C_1 = 0$，故而：$D_1 \sin kl = 0$

上式中，若 $D_1 = 0$，则 $y \equiv 0$，即压杆各处挠度均为零，杆仍然保持直线状态，这与压杆处于微弯状态的前提相矛盾。因此 $D_1 \neq 0$，只有 $\sin kl = 0$

满足上式的 kl 值为：$kl = n\pi(n = 0,1,2,\cdots)$

于是有：$k = \frac{n\pi}{l}$

于是压力 $P = k^2 EI = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}$

上式表明，使压杆保持曲线形状平衡的压力，在理论上是多值的。实际上，只有使杆件保持微小弯曲压力才是临界压力 P_{cr}。

若取 $n = 0$，则 $P = 0$，表明杆件上未受压力已失稳，故 $n \neq 0$。因此，只有取 $n = 1$ 才有实际意义，于是可得临界压力为：

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

上式即为两端铰支细长压杆的临界压力表达式，也称为两端铰支细长压杆的欧拉公式。当杆端约束不同时，显然其临界压力也不同：

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

这是欧拉公式的普遍形式。式中 μ 称为长度系数(亦称约束影响系数)，它表示杆端约束对临界压力的影响，随杆端约束而异。μ 表示把压杆折算成相当于两端铰支压杆时的长度，称为相当长度。

几种常见杆端约束的长度系数为如表 13-1 所示。

表 13-1　几种常见杆端的约束的长度系数

杆端约束情况	一端固定 一端自由	两端铰支	·端铰支 一端固定	两端固定
μ	2.0	1	0.7	0.5

3. 失稳弯曲方向

(1) 球形铰：弯曲与 $P_{cr\,min}$ 或 I_{min} 方向一致。

(2) 柱形铰：弯曲与 $P_{cr\,min}$ 方向一致。

(3) 圆杆、球形铰，失稳方向不确定，$x-z$ 平面内，接近固支，μ 在 $0.5 \sim 1$ 之间，$y-z$ 平面，铰支。如果 $I_x > I_y$，需算两向 P_{cr}(因 $\mu_x > \mu_y$)，如果 $I_x < I_y$，只需计算 $(P_{cr})_x$。

4. 临界应力与柔度

细长杆的临界应力公式为：$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

式中 $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ 称为压杆的柔度，它与压杆的长度、约束情况、截固形状及尺寸有关。

柔度的分界值为：

$$\lambda_P(\lambda_2) = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}};\lambda_s(\lambda_1) = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

式中 a，b 是与材料性质相关的常数，单位为 MPa 。

5. **欧拉公式的适用范围与经验公式**

(1) 欧拉公式是利用压杆微弯时的挠曲线近似方程推导出来的，而挠曲线近似微分方程又是建立在材料服从胡克定律的基础上的。

因此，只有当临界应力 σ_{cr} 不超过材料的比例极限 σ_p 时，欧拉公式才能成立，故有：

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2},\lambda \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

柔度 λ 大于或等于极限柔度 λ_p 的压杆称为大柔度杆，也即前面提到的细长杆。

(2) 临界应力超过比例极限的压杆稳定问题，属于非线弹性失稳问题(中长杆 $\lambda_S<\lambda<\lambda_P$)。在实际应用中经常采用建立在实验基础上的经验公式。常用的经验公式有直线公式和抛物线公式。

直线公式：$\sigma_{cr}=a-b\lambda$

抛物线公式：$\sigma_{cr}\geqslant a_1-b_1\lambda^2$

(3) 如果压杆的柔度很小，即属于短粗杆($\lambda\leqslant\lambda_S$)。试验结果表明，当压力达到材料的屈服极限 σ_s(或强度极限 σ_b)时，压杆由于强度不够而失效，不会出现失稳。因此，对于这种情况，应按强度问题处理，其临界应力等于屈服极限 σ_s(或强度极限 σ_b)，即

$$\sigma_{cr}=\sigma_s(\text{或}\ \sigma_{cr}=\sigma_b)$$

临界应力的总图如图 13-2 所示。

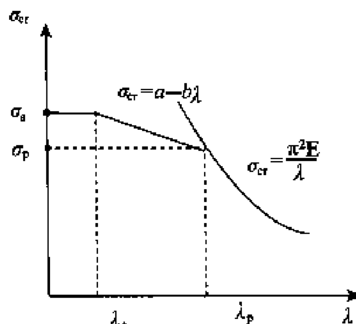


图 13-2

(1)$\lambda\geqslant\lambda_p$，为大柔度压杆；(2)$\lambda_s\leqslant\lambda<\lambda_p$，为中柔度压杆；(3)$\lambda<\lambda_s$，为小柔度压杆。

6. **压杆的稳定条件**

(1) 安全系数法

为了保证压杆有足够的稳定性，应使其工作压力小于临界力，或使其工作应力小于临界应力，即：

$$P\leqslant\frac{P_{cr}}{n_{st}}=[P_{st}]$$

式中 $[P_{st}]$ 为稳定许用压力，n_{st} 为压杆实际稳定安全系数，$[n_{st}]$ 为规定的稳定安全系数。

(2) 折减系数法

采用折减系数法进行压杆稳定性校核时，引入稳定许用应力 $[\sigma_{st}]$，此时压杆的稳定条件为：

$$\sigma \leqslant \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}} = [\sigma_{st}]$$

其中$[\sigma_{st}]$常用基本许用应力$[\sigma]$来表示，即$[\sigma_{st}] = \varphi[\sigma]$

式中 φ 为与压杆的柔度 λ 相关且小于 1 的系数，称为折减系数，计算时可查相关手册。

7. 提高压杆稳定性的一些措施

(1) 减小压杆长度；(2) 改善压杆的约束条件；(3) 选择合理的截面形状；(4) 合理选择材料；(5) 使压杆在各弯曲平面内的柔度相等。

第二节　典型题分析

重要考点提示：

(1) 对一般任意支撑条件下的压杆的临界压力的推导；

(2) 压杆的稳定校核计算。

【例 1】 如图 13-3 所示的托架中，杆 AB 的直径 $d = 30\text{mm}$，长度 $l = 800\text{mm}$，两端可视为球铰链约束，材料为 Q235 钢(中柔度 Q235 钢杆的经验公式：$\sigma_{cr} = 235 - 0.0068\lambda^2$)。

(1) 求托架的临界载荷 F_{pcr}。

(2) 若已知工作荷载 $F_p = 30\text{kN}$，并要求杆 AB 的稳定安全系数$[n]_{st} = 2.0$，校核杆架是否安全。(华中科技大学，2003 年)

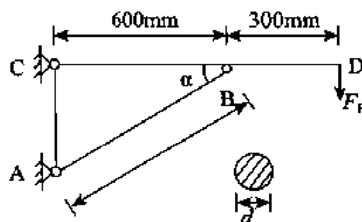


图 13-3

解 (1) 设杆 AB 对梁 CD 的支撑力是 N，则对梁 CD 的受力分析如图 13-4 所示。

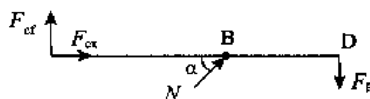


图 13-4

由平衡条件$\sum M_C = 0$得到：

$$F_P \cdot 900 - N \cdot \sin\alpha \cdot 600 = 0，即\ F_P = \frac{2N\sin\alpha}{3} \qquad ①$$

AB 杆的惯性半径是：

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \frac{d}{4} = \frac{30}{4} = 7.5\text{mm}$$

柔度是：$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1.0 \times 800}{7.5} = 106.7$

对于中柔度杆 AB，其临界压力是：

$N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = (235 - 0.0068\lambda^2)A$

$= [235 - 0.0068 \times (106.7)^2] \times 10^6 \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.03)^2$

$= 111.3 \times 10^3 (\mathrm{N}) = 111.3(\mathrm{kN})$

由式 ① 得到托架的临界载荷是：

$$F_{Pcr} = \frac{2N_{cr}\sin\alpha}{3} = \frac{2 \times 111.3 \times 0.66}{3} = 49(\mathrm{kN})$$

(2) 当工作荷载 $F_P = 30\mathrm{kN}$ 时，杆 AB 的稳定安全系数是：

$$n = \frac{F_{Pcr}}{F_P} = \frac{49}{30} = 1.64 < [n]_{st} = 2.0$$

所以该托架不安全！

评注：在实际工作中，应按照 $\lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$（其中，$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_s}}$，$\lambda_2 = \frac{a - \sigma_s}{b}$）公式判断杆是否属于中柔度杆。在本题中，由题意杆 AB 属于中柔度杆，所以免去该过程，读者应注意到这一点。

【例 2】 求图 13-5 所示压杆中点受力 P 的临界值。两杆端支撑均为固定铰支撑，不发生任何方向的位移。杆的惯性矩 I = 常数，弹性模量为 E。（忽略杆自重的影响）（大连理工大学，2001 年）

解 由题图知道杆 AC 受拉，杆 BC 受压。令两杆的轴力分别是 N_{AC} 和 N_{BC}，则对节点 C 进行受力分析如图 13-6 所示。

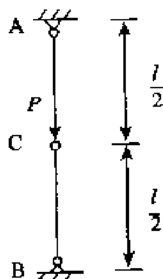


图 13-5

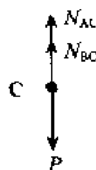


图 13-6

又平衡条件 $\sum F = 0$ 得到：$N_{AC} + N_{BC} = P$

由于 A、B 端固定得到变形协调条件如下：$\Delta l_{AC} = \Delta l_{BC}$

由物理条件：$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot \frac{l}{2}}{EA}$，$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot \frac{l}{2}}{EA}$

由以上各式可得：$N_{AC} = N_{BC} = \frac{P}{2}$

由欧拉公式，BC 杆的临界压力是（两端铰支，$\mu = 1.0$）：$N_{BC\cdot cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

联合上面两式得到压杆中点受力 P 的临界值是 $P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$

评注：本题实际上是一个超静定问题和压杆稳定的综合题，但立足点都比较浅显，因而难度较小。

【例 3】 梁 AB 为 T 型截面，如图 13-7 所示，$q=10\text{kN}\cdot\text{m}$，$P=20\text{kN}$，$l=1\text{m}$，$l_1=3\text{m}$，$l_2=2\text{m}$，其抗拉$[\sigma]_l=40\text{MPa}$，抗压$[\sigma]_y=100\text{MPa}$。CD 为圆形截面杆，直径 $d=40\text{mm}$，$l_3=0.9\text{mm}$，已知 $\sigma_{cr}=306-1.12x$，$E=210\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，$\sigma_s=240\text{MPa}$，$n_w=3$，试分析结构强度与稳定性。（武汉大学，2002 年）

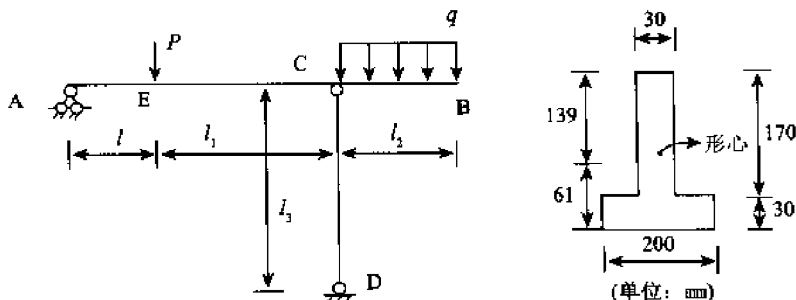


图 13-7

解 令杆 CD 的压力是 N_{CD}，对梁 AB 由平衡条件 $\sum M_A=0$ 得到：

$$Pl+ql_2\cdot(l+l_1+\frac{l_2}{2})-N_{CD}\cdot(l+l_1)=0$$

$$N_{CD}=\frac{20\times1+10\times2\times(1+3+1)}{1+3}=30(\text{kN})$$

梁 AB 中的最大弯矩值只会发生在 C 点和 E 点，

其中 C 点的弯矩是：$M_c=-\frac{1}{2}ql_2^2=-\frac{1}{2}\times10\times2^2=-20(\text{kN}\cdot\text{m})$，

E 点的弯矩是：$M_E=N_{CD}\cdot l_1-ql_2\cdot\left(l_1+\frac{l_2}{2}\right)=30\times3-10\times2\times(3+1)=90-80=10(\text{kN}\cdot\text{m})$。

由截面形状容易发现最大压应力可能发生在 C 截面下边缘或 E 截面上边缘，最大拉应力发生在 C 截面上边缘。

C 截面下边缘的压应力是：

$$\sigma_c^-=\frac{M_c}{I_z}\cdot0.061=\frac{20\times10^3}{40\times10^{-6}}\times0.061=30.3\cdot10^6(\text{Pa})=30.3(\text{MPa})<[\sigma]_y=100(\text{MPa})$$

E 截面上边缘的压应力是：

$$\sigma_E^-=\frac{M_E}{I_z}\cdot0.139=\frac{10\times10^3}{40\times10^{-6}}\times0.139=34.7\times10^6(\text{Pa})<100(\text{MPa})$$

C 截面上边缘的拉应力是：

$$\sigma_c^+=\frac{M_c}{I_z}\times0.139=\frac{20\times10^3}{40\times10^{-6}}\cdot0.139=69\times10^6(\text{Pa})=69(\text{MPa})>[\sigma]_l=40(\text{MPa})$$

综合以上，梁的强度不满足要求！

杆 CD 的柔度是：$\lambda=\frac{\mu l_3}{i}=\frac{1.0\times0.9}{\frac{1}{4}\times0.04}=90$

$$\lambda_P = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} = 3.14\sqrt{\frac{210\times10^9}{200\times10^6}} = 101.75$$

$$\lambda_S = \frac{a-\sigma_S}{b} = \frac{306-240}{1.12} = 58.93$$

由于 $\lambda_S < \lambda < \lambda_P$，所以 CD 杆为中柔度杆。

其临界压力是：

$$N_{cr} = \sigma_{cr}\cdot A = (306-1.12\times90)\times10^6\times\frac{1}{4}\times\pi\times(0.04)^2 = 258000\text{N} = 258(\text{kN})$$

杆 CD 的稳定安全系数是：$n = \dfrac{N_{cr}}{N_{CD}} = \dfrac{258}{30} = 8.7 > n_w = 3$

杆 CD 的稳定性满足要求。

评注：对于细长受压杆，一般由稳定性控制设计标准。

【例 4】 如图 13-8 所示的结构，力 P 作用线沿铅垂方向，AC 和 BC 均为圆截面杆，其直径分别是 $d_{AC} = 16\text{mm}$，$d_{BC} = 14\text{mm}$，材料为 A3 钢，E = 206GPa，直线公式系数 $a = 310\text{MPa}$，$b = 1.14\text{MPa}$。$\lambda_p = 105$，$\lambda_s = 61.4$，稳定安全系数 $n_{st} = 2.4$，校核结构稳定性。(北方交通大学，2002 年)

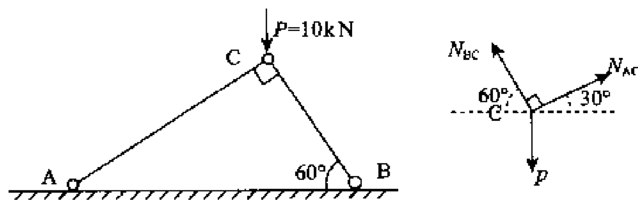


图 13-8

解 设杆 AC、BC 的压力是 N_{AC}、N_{BC}，则对节点 C 进行受力分析如图 13-8 右图所示。

由平衡条件 $\sum F_x = 0$，$\sum F_y = 0$ 得到：

$$\begin{cases} N_{AC}\cdot\cos30° - N_{BC}\cdot\cos60° = 0 & ① \\ N_{AC}\cdot\sin30° + N_{BC}\cdot\sin60° - P = 0 & ② \end{cases}$$

解出 $N_{AC} = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}\times10 = 5(\text{kN})$，$N_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}P = \frac{\sqrt{3}}{2}\times10 = 8.7(\text{kN})$

杆 AC 的柔度是：$\lambda_{AC} = \dfrac{\mu l_{AC}}{i} = \dfrac{1.0\times0.5\sqrt{3}}{\frac{1}{4}\times0.016} = 217 > \lambda_P = 105$，属大柔度杆。

其临界压力是：$N_{AC,cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda_{AC}^2}\cdot A = \dfrac{\pi^2\times206\times10^9}{217^2}\times\dfrac{1}{4}\times\pi\times(0.016)^2 = 8.67(\text{kN})$

杆 BC 的柔度是：$\lambda_{BC} = \dfrac{\mu l_{BC}}{i} = \dfrac{1.0\times0.5}{\frac{1}{4}\times0.014} = 143 > \lambda_p = 105$，属大柔度杆。

其临界压力是：$N_{BC,cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda_{BC}^2}\cdot A = \dfrac{\pi^2\times206\times10^9}{105^2}\times\dfrac{1}{4}\times\pi\times(0.014)^2 = 15.3(\text{kN})$

于是得到各杆的稳定安全系数是：

$$n_{AC} = \frac{N_{AC,cr}}{N_{AC}} = \frac{8.67}{5} = 1.7 < n_{st} = 2.4$$

$$n_{BC} = \frac{N_{BC,cr}}{N_{BC}} = \frac{15.3}{8.7} = 1.8 < n_{st} = 2.4$$

所以，结构的稳定性不满足要求！

评注：大柔度杆的临界压力公式 $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$ 和临界压应力公式 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\mu\lambda)^2}$，应熟记。

【例 5】 梁 AB 和杆 BC 材料相同，梁的惯性矩 I 与杆的面积 A 之间的关系是：$A = 3I/l^2$，材料的 $E = 200GPa$，$\sigma_p = 200MPa$，杆直径 $d = 40mm$，求当 BC 杆处于临界状态时的 q 值。（山东大学，2001 年）

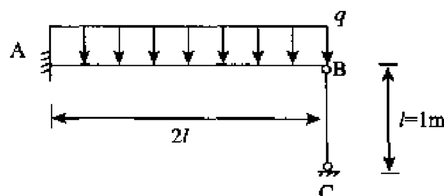


图 13-9

解 杆 BC 的柔度是：

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1.0 \times 1}{\frac{1}{4} \times 0.04} = 100 > \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 100，属大柔度杆。$$

其临界压力是：$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{10 \times 200 \times 10^9 \times \frac{1}{64} \times \pi \times (0.04)^4}{(1.0 \times 1)^2} = 251(kN)$

当杆 BC 处于临界压力时，其压缩量是：

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{cr} \cdot l}{EA} = \frac{251 \times 10^3 \times 1}{200 \times 10^9 \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.04)^2} = 0.001(m) = 1(mm)$$

此时，由变形协调条件，梁 AB 在 B 点的挠度是：

$$f_B = \frac{q \cdot (2l)^4}{8EI} - \frac{N_{cr}(2l)^3}{3EI} = \Delta l_{BC} = 1(mm)$$

从中解出 $q = 370(kN/m)$

评注：压杆稳定通常和超静定问题综合出题，读者要引起注意。

【例6】 如图 13-10 所示的结构，系由两根悬臂梁与杆 BC 连接面成。设两梁的截面相同，主惯性矩为 I，杆 BC 的横截面面积是 A。梁与杆的材料相同，弹性模量是 E。当 AB 梁作用均布载荷 q 时，求：

(1)BC 杆的内力；

(2) 若压杆 BC 在图示平面内丧失稳定时，此时的载荷 q 应是多少？(上海交通大学，2002 年)

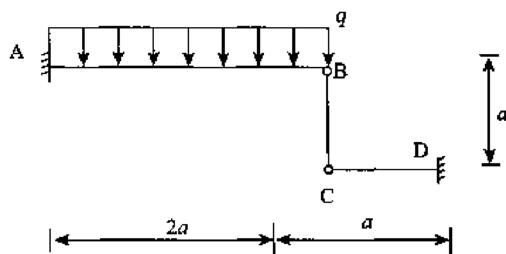


图 13-10

解 (1) 令杆 BC 的内力是 N_{BC}(压力),则

悬臂梁 AB 在 B 点的挠度是:$f_B = \frac{q \cdot (2a)^4}{8EI} - \frac{N_{BC} \cdot (2a)^3}{3EI}$(竖直向下)

悬臂梁 CD 在 C 点的挠度是:$f_C = \frac{N_{BC} \cdot a^3}{3E}$(竖直向下)

杆 BC 的压缩量是:$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot a}{EA}$

由系统的变形协调条件:$f_B - f_C = \Delta l_{BC}$

由上面各式解出:$N_{BC} = \frac{2qAa^4}{3Aa^3 + aI}$(压力)

(2) 若杆 BC 在平面内失稳时,其临界压力是:

$N_{BC,cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu a)^2} = N_{BC} = \frac{2qAa^4}{3Aa^3 + aI}$(两端铰支,其中,$\mu = 1$)

$$q = \frac{\pi^2 EI(3Aa^3 + aI)}{2Aa^6}$$

评注:和本章前述例题一样,本题又是一道超静定问题和压杆稳定问题的综合题。抓住变形协调条件 $f_B - f_C = \Delta l_{BC}$,本题便迎刃而解。

【例 7】 图 13-11 所示结构系统,已知其水平杆 AB 假定为刚性,A 端为光滑铰支,B 端作用有垂直向下的集中力 P;竖直杆 CD 和竖直杆 EF 均假设为细长杆,且杆 CD 的长度为 L_1,杆 EF 的长度为 L_2。杆 CD 与杆 EF 的 EA 和 EI 相同,C、D、E 和 F 处均假设为光滑铰支,试计算:

(1) 如果 $L_1 = L_2 = L$,当集中力 P 为何值时结构系统将发生失稳破坏?

(2) 在集中力 P 的作用下,如果假设 $L_1 = L$,则 L_2 应满足什么条件时,杆 CD 和杆 EF 将同时发生失稳破坏?

(3) 发生失稳破坏时,问题(1) 的 P 值与问题(2) 的 P 值相比将有何变化?(武汉大学,2003 年)

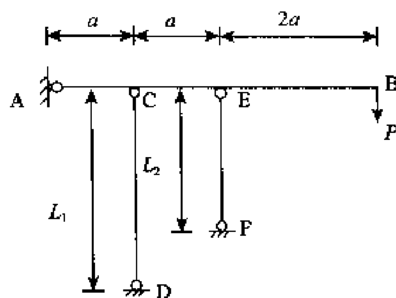


图 13-11

解 (1) 若是 $L_1 = L_2 = L$,令杆 CD、EF 的轴力分别是 N_{CD} 和 N_{EF},则对于水平杆 AB,由平衡条件 $\sum M_A = 0$ 得到:

$$P \cdot 4a - N_{CD} \cdot a - N_{EF} \cdot 2a = 0$$

由于水平杆 AB 为刚性得到变形协调条件如下:$\Delta l_{EF} = 2 \cdot \Delta l_{CD}$

由物理条件:$\Delta l_{EF} = \frac{N_{EF} \cdot L}{EA}$,$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot L}{EA}$

联合上面各式得到 $N_{CD}=\frac{4}{5}P, N_{EF}=\frac{8}{5}P$

那么，杆 EF 先发生失稳，且其临界压力是：$N_{EFcr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$

于是得到集中力 P 的临界值是：$P_{cr}=\frac{5}{8}\cdot N_{EFcr}=\frac{5}{8}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2}$

即当集中力 P 为 $\frac{5}{8}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ 时，结构系统将发生失稳破坏。

(2) 若 $L_1=L$，杆 CD 和 EF 同时发生失稳破坏，有：

$$\begin{cases} N_{CD}=\dfrac{4PL_2}{4L_1+L_2}=\dfrac{4PL_2}{4L+L_2}=\dfrac{\pi^2 EI}{L^2} & ① \\ N_{EF}=\dfrac{4PL_1}{4L_1+L_2}=\dfrac{8L_1}{4L+L_2}=\dfrac{\pi^2 EI}{L_2^2} & ② \end{cases}$$

将 ① 式除以 ② 式得到，$\frac{L_2}{2L}=\left(\frac{L_2}{L}\right)^2, L_2=\frac{L}{2}$

即当 $L_2=\frac{L}{2}$ 时，杆 CD 和 EF 将同时发生失稳。

(3) 发生失稳破坏时问题(2) 的 P 值是：

$$P'_{cr}=\frac{4L+L_2}{4L_2}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2}=\frac{4L+\frac{L}{2}}{4\times\frac{L}{2}}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

和问题(1) 中的 P 值比为：

$$\frac{P'_{cr}}{P_{cr}}=\frac{\frac{9}{4}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2}}=3.6$$

临界荷载是原来的 3.6 倍。

评注：将结构中各受压构件的实际压力按照临界压力来分配使材料能够充分利用，体现结构设计的要求。

【例 8】 1、2 杆均为圆截面，直径相同，$d=40\text{mm}$，弹性模量 $E=200\text{GPa}$，材料的许用应力 $[\sigma]=120\text{GPa}$，适用欧拉公式的临界柔度为 90，并规定稳定安全系数 $n_{st}=\tau$，试求许用载荷 $[p]$。(北京航空航天大学，2002 年)

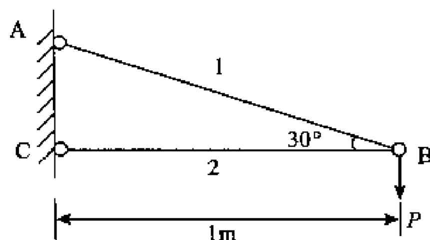


图 13-12

解 设杆 AB 的拉力是 N_{AB}，杆 BC 的压力是 N_{BC}，对节点 B 的受力分析如图 13-13 所示。

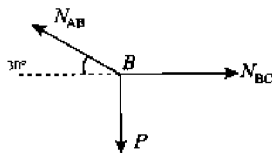


图 13-13

由平衡条件 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ 得到

$$\begin{cases} N_{BC} - N_{AB} \cdot \cos 30° = 0 \\ N_{AB} \cdot \sin 30° - P = 0 \end{cases}$$

解出 $N_{AB} = 2P$(拉)，$N_{BC} = \sqrt{3}P$(压)

(1) 若杆 AB 中的应力达到许用应力$[\sigma] = 120\text{MPa}$ 时，其内力是：

$$N_{ABcr} = [\sigma] \cdot A = 120 \times 10^6 \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.04)^2 = 151(\text{kN})$$

此时结构的临界荷载是：$P_{cr} = \frac{1}{2} \cdot N_{ABcr} = \frac{1}{2} \times 151 = 75.5(\text{kN})$

(2) 杆 BC 的柔度是：$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1.0 \times 1}{\frac{1}{4} \times 0.04} = 100 > \lambda_p = 90$，属大柔度杆。

其临界压力是：$N_{BCcr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} A = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{100^2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.04)^2 = 248(\text{kN})$

此时结构的临界荷载是：$P_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3}} N_{BCcr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 248 = 143(\text{kN})$

比较(1)、(2) 两种破坏情况下的结构临界载荷大小知道结构的临界载荷是 $P_{cr} = 143(\text{kN})$，则结构的许用载荷是：

$$[p] = \frac{P_{cr}}{n_{st}} = \frac{143}{2} - 71.5(\text{kN})$$

评注：要综合考察结构的强度要求和稳定性要求才能获得其许用载荷。

【例 9】 如图 13-14 所示结构，AB 的直径为 $d = 80\text{mm}$ 的圆杆，BC 为正方形的截面杆，边长是 70mm。AB 和 BC 杆可以独立发生弯曲且互不影响；两杆的弹性模量同是 $E = 200\text{GPa}$，比例极限是 $\sigma_p = 160\text{MPa}$；已知 $l = 3\text{m}$，稳定安全系数 $n_{st} = 2.5$，求许用载荷$[p]$。(南京理工大学，2002 年)

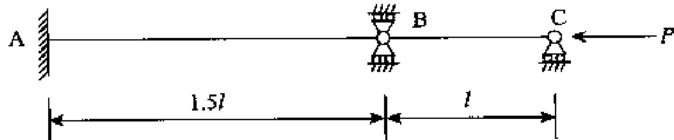


图 13-14

解 杆 AB 的柔度是：$\lambda_{AB} = \frac{\mu \cdot 1.5l}{i_{AB}} = \frac{0.7 \times 1.5 \times 3}{\frac{1}{4} \times 0.08} = 158$

杆 BC 的惯性半径是：$i_{BC}=\sqrt{\frac{I_{BC}}{A_{BC}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{12}\times 0.07\times(0.07)^3}{0.07\times 0.07}}=0.02(\mathrm{m})$

其柔度是：$\lambda_{BC}=\frac{\mu\cdot l}{i_{BC}}=\frac{1.0\times 3}{0.02}=150$

$$\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{160\times 10^6}}=111$$

显然，杆 AB 和 BC 杆均属于大柔度杆。

杆 AB 的临界压力是：

$$N_{ABcr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda_{AB}^2}\cdot A_{AB}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{158^2}\times\frac{1}{4}\times\pi\times(0.08)^2=400(\mathrm{kN})$$

杆 BC 的临界压力是，

$$N_{BCcr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda_{AB}^2}\cdot A_{BC}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{150^2}\times 0.07\times 0.07=436(\mathrm{kN})$$

那么结构的临界压力是 $P_{cr}=400(\mathrm{kN})$，结构的许用载荷是：

$$[p]=\frac{P_{cr}}{n_{st}}=\frac{400}{2.5}=160(\mathrm{kN})$$

评注：对于各种支撑条件下杆的柔度系数，读者应熟记。

【例 10】 如图 13-15 所示正方体桁架结构由五根圆钢杆组成，各杆直径均为 $d=40\mathrm{mm}$，$a=1.5\mathrm{m}$，材料均为 Q235 钢，$[\sigma]=160\mathrm{MPa}$，$E=206\mathrm{GPa}$，弹性屈曲的临界柔度值是 $\lambda_p=1.32$，连接处均是铰链。试求结构的许用载荷$[p]$。规定的稳定安全系数$[n_{st}]=2$。（清华大学，2000 年）

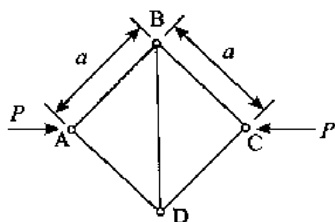


图 13-15

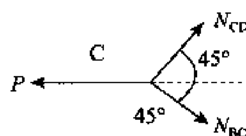


图 13-16

解 令杆 BC 和 CD 杆中的内力分别是 N_{BC} 和 N_{CD}，则对节点 D 进行受力分析如图 13-16 所示。

由平衡条件 $\sum F_x=0,\sum F_y=0$ 得到：

$$\begin{cases}N_{CD}\cdot\cos45^\circ+N_{BC}\cdot\cos45^\circ=P\\ N_{CD}\cdot\sin45^\circ-N_{BC}\cdot\sin45^\circ=0\end{cases}$$

从中解出 $N_{BC}=N_{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}P$（压力）

同理能够获得杆 AB 和杆 AD 的内力是，$N_{AB}=N_{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}P$（压力）。

通过对节点的受力分析容易得到杆的内力是 $N_{BD}=P$（拉力）

当杆 BD 中拉应力达到许用应力时，其内力是：

$N_{BDcr} = [\sigma] \cdot A = 160 \times 10^6 \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.04)^2 = 200(kN)$

此时，结构的许用载荷是：

$$[p] = N_{BDcr} = 200(kN)$$

杆 AB 的柔度是：$\lambda = \frac{\mu a}{i} = \frac{1.0 \times 1.5}{\frac{1}{4} \times 0.04} = 150 > \lambda_P = 132$，属大柔度杆。

其临界压力是：$N_{ABcr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{\pi^2 \times 206 \times 10^9}{132^2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.04)^2 = 113(kN)$

结构的临界载荷是：$P_{cr} = \sqrt{2} \cdot N_{ABcr} = \sqrt{2} \times 113 = 160(kN)$

此时，结构的许用载荷是：$[p] = \frac{P_{cr}}{[n_w]} = \frac{160}{2} = 80(kN)$

由对称性，其余各边杆的分析同杆 AB。

比较上述两许用载荷大小得到结构的许用载荷是$[p] = 80kN$。

评注：本题中，稳定性要求控制结构承载力。在钢结构的设计中，结构承载力基本上受稳定性控制。

【例 11】 由六根钢杆组成的正方形结构，如图 13-17 所示。图中 E 处两杆相互无约束，结构连接处均为光滑铰链，正方形边长 $a = 1m$，各杆的直径都为 $d = 50mm$。通过计算，说明图中哪根杆件首先出现失稳？并求此时结构的外载荷 P。圆杆材料为 Q235 钢，其弹性模量 $E = 200GPa$，比例极限 $\sigma_P = 200MPa$，屈服极限 $\sigma_S = 240MPa$，材料常数 $a = 314MPa$，$b = 1.12MPa$。（华中科技大学，2003 年）

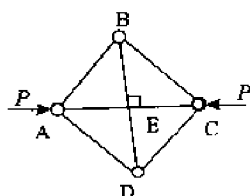


图 13-17

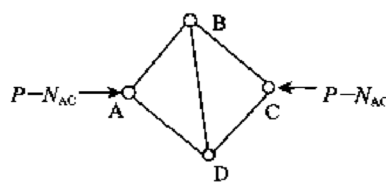


图 13-18

解 令杆 AC 的压力是 N_{AC}，解除多余约束 AC 杆，则基本系如图 13-18 所示。

令 $P - N_{AC} = Q$，则由受力分析，各杆的内力分别是：

$$\begin{cases} \text{杆 AB}: \frac{\sqrt{2}}{2}Q \quad (\text{压}) \\ \text{杆 AD}: \frac{\sqrt{2}}{2}Q \quad (\text{压}) \\ \text{杆 BC}: \frac{\sqrt{2}}{2}Q \quad (\text{压}) \\ \text{杆 CD}: \frac{\sqrt{2}}{2}Q \quad (\text{压}) \\ \text{杆 BD}: Q \quad (\text{拉}) \end{cases}$$

基本系的变形能是：$U = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{Q^2 a}{EA}$

由卡氏定理得到 A、C 两点的相对位移是：

$$\Delta l_{AC} = \frac{\partial U}{\partial Q} = (2+\sqrt{2}) \cdot \frac{Qa}{EA} = (2+\sqrt{2}) \cdot \frac{(P-N_{AC})a}{EA} \quad ①$$

而由变形协调条件知道 A、C 两点的相对位移等于杆 AC 的收缩量是：

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot \sqrt{2}a}{EA} \quad ②$$

联合 ①② 两式得到：$N_{AC} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} \cdot P = 0.7P$(压)

这样，其余各杆的内力是：

$$N_{AB} = N_{AD} = N_{BC} = N_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}(P-N_{AC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(P-0.7P) = 0.2P(\text{压})$$

$$N_{BD} = Q = P - N_{AC} = P - 0.7P = 0.3P(\text{拉})$$

杆 AC 的柔度是：$\lambda_{AC} = \dfrac{\mu \cdot \sqrt{2}a}{i} = \dfrac{1.0 \times \sqrt{2} \times 1}{\frac{1}{4} \times 0.05} = 113$

各边的杆(AB、BC、CD、AD) 的柔度是：$\lambda_B = \dfrac{\mu \cdot a}{i} = \dfrac{1.0 \times 1}{\frac{1}{4} \times 0.05} = 80$

而柔度分界点是：

$$\begin{cases} \lambda_P = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 100 \\ \lambda_S = \dfrac{a - \sigma_S}{b} = \dfrac{314 - 240}{1.12} = 66 \end{cases}$$

于是$\begin{cases} \lambda_{AC} > \lambda_P, \text{杆 AC 是大柔度} \\ \lambda_S < \lambda_B < \lambda_P, \text{各边杆均是中等柔度杆} \end{cases}$

杆 AC 的临界压力是：

$$N_{ACcr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{AC}^2} \cdot A = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{113^2} \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.05)^2 = 303(\text{kN})$$

此时，结构的临界载荷是：$P_{cr} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot N_{ACcr} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times 303 = 428(\text{kN})$

各边杆(AB、BC、CD、AD) 的临界压力是：

$$N_{Bcr} = (a - b \cdot \lambda_B) \cdot A = (314 \times 10^6 - 1.12 \times 10^6 \times 80) \times \frac{1}{4} \times \pi \times (0.05)^2 = 440(\text{kN})$$

此时，结构的临界载荷是：$P_{cr} = \dfrac{1}{0.2} \cdot N_{Bcr} = \dfrac{1}{0.2} \times 440 = 2200(\text{kN})$

比较上述两结构的临界载荷得到结构的临界载荷是 $P_{cr} = 428(\text{kN})$。即杆 AC 先出现失稳，此时外载荷是 428kN。

评注：读者应熟记分界点的公式，即 $\lambda_p = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$，$\lambda_s = \dfrac{a - \sigma_s}{b}$。本题难度在超静定结构的计算，在后续章节有详细介绍。

【例 12】 如图13-19所示，实心钢杆的直径$d=100\text{mm}$，长$l=5\text{m}$，弹性模量$E=200\text{GPa}$，比例极限$\sigma_P=220\text{MPa}$，线膨胀系数$\alpha=12.5\times10^{-6}/\text{C}^\circ$。当温度升高多少时，此杆失稳。(南京理工大学，2001年)

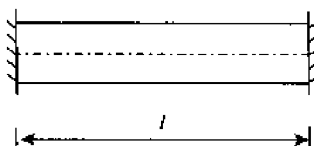


图 13-19

解 令温度升高x时，此杆失稳。此时由于杆的伸长受到约束在杆中形成的内力设为N(压力)。由于温度升高而引起的杆件伸长是：$\Delta l_1=\alpha\cdot x\cdot l$

由于内力N而引起的杆件收缩是：$\Delta l_2=\dfrac{Nl}{EA}$

由变形协调条件，即杆的两端固定，长度保持恒定，有：$\Delta l_1=\Delta l_2$

联合上面三式可得$N=\alpha x\cdot EA$

杆的柔度是：$\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=\dfrac{0.5\times5}{\dfrac{1}{4}\times0.1}=100$

柔度分界点是：$\lambda_p=\sqrt{\dfrac{\pi^2E}{\sigma_p}}=\sqrt{\dfrac{\pi^2\times200\times10^9}{220\times10^6}}=94$

显然，$\lambda>\lambda_P$，属于大柔度杆。

其临界压力是：

$$N_{cr}=\sigma_{cr}\cdot A=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{\pi^2\times200\times10^9}{100^2}\times\frac{1}{4}\times\pi\times(0.1)^2=500\pi(\text{kN})$$

此时，温度的升高值为：

$$x=\frac{N_{cr}}{\alpha EA}=\frac{500\pi\times10^3}{12.5\times10^{-6}\times200\times10^9\times\frac{1}{4}\times\pi\times(0.1)^2}=79(^\circ\text{C})$$

评注：本题将温度应力问题和压杆稳定问题综合，这类习题也十分常见，但本题的超静定结构十分简单，所以还是一道基础题。若超静定结构十分复杂加之有不均匀温变，那么这一类问题还是有一定难度的，读者要引起注意。

【例 13】 如图13-20所示，1、2两杆材料相同，弹性模量均是E；两杆截而都是方形，边长分别是$3a$和a。已知$l=70a$，为避免失稳，试求此结构升高温度t的最大值。设材料的线膨胀系数$\alpha=1.25\times10^{-5}/^\circ\text{C}$，并且适用欧拉公式的柔度临界值是100。(天津大学，1999年)

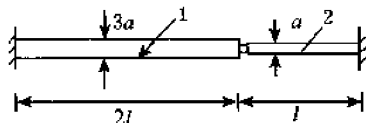


图 13-20

解 当温度升高t时，由于杆件伸长在其中形成的内力设为N，解除1、2两杆之间的约束，则基本系如图13-21所示，

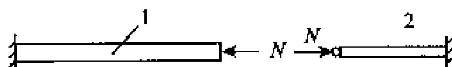


图 13-21

杆件 1 在温度升高和压力共同作用下的伸长量是：$\Delta l_1 = \alpha \cdot t \cdot 2l - \dfrac{N \cdot 2l}{EA_1}$

杆件 2 在温度升高和压力共同作用下的伸长量是：$\Delta l_2 = \alpha \cdot t \cdot l - \dfrac{Nl}{EA_2}$

由于结构的两端固定，其总的长度保持恒定得到变形协调条件：$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$

从中解出 $N = \dfrac{27\alpha t \cdot Ea^2}{11}$（压力）　①

杆 1 的柔度是：$\lambda_1 = \dfrac{\mu \cdot 2l}{i_1} = \dfrac{0.7 \times 2 \times 70a}{\dfrac{1}{\sqrt{12}} \times 3a} = 113 > \lambda_p = 100$，属于大柔度杆。

杆 2 的柔度是：$\lambda_2 = \dfrac{\mu l}{i_2} = \dfrac{0.7 \times 70a}{\dfrac{1}{\sqrt{12}} \times a} = 170 > \lambda_p = 100$，属于大柔度杆。

显然杆 2 先发生失稳，其临界压力是：$N_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda_2^2} \cdot A = \dfrac{\pi^2 E}{170^2} \cdot a^2$

此时，由 ① 式得到结构升温 t 的最大值是：

$$t_{max} = \frac{11 \cdot N_{cr}}{27\alpha Ea^2} = \frac{11\pi^2}{170^2 27\alpha} = \frac{11 \times 10}{170^2 \times 27 \times 1.25 \times 10^{-5}} = 11.3(^\circ C)$$

评注：对于方形截面惯性半径（$i = \dfrac{1}{\sqrt{12}} \cdot a$），读者要熟记。

【例 14】　一底端固定而顶端由一刚度为 β 的线性弹簧所支撑的立柱，如图 13-22 所示。若已知 $\beta = \dfrac{3EI}{l^3}$，试证：立柱的临界压力 P_{cr} 所满足的特征方程是：

$$\tan kl - kl + \frac{k^3 l^3}{3} = 0$$

其中 $k^2 = \dfrac{P}{EI}$，EI 是截面的抗弯刚度。（北京大学，2001 年）

解　令线性弹簧支撑的伸长量是 δ，建立如图 13-23 所示直角坐标系，

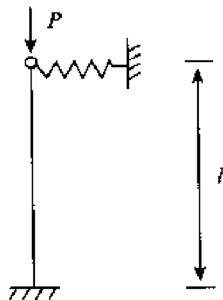


图 13-22

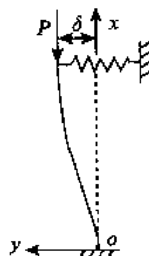


图 13-23

则任意 x 截面的弯矩是：$M(x) = P(\delta - y) - \beta\delta \cdot (l - x)$

由弯曲挠曲线的近似方程：$EIy'' = M(x) = P(\delta - y) - \beta\delta \cdot (l - x)$

即 $EIy'' + Py = P\delta - \beta\delta \cdot (l - x)$

令 $k^2 = \dfrac{P}{EI}$，有

$$y'' + k^2 y = \frac{1}{EI} \cdot [P\delta - \beta\delta \cdot (l - x)]$$

$$y = A\sin kx + B\cos kx + \left[\delta - \frac{\beta}{P} \cdot \delta(l - x)\right]$$

由边界条件，即 $x = 0$ 时，$y = y' = 0$；$x = L$ 时，$y = \delta$

将其代入通解方程得到：

$$\begin{cases} B + \delta(1 - \dfrac{\beta}{P} \cdot l) = 0 \\ Ak + \dfrac{\beta}{P} \cdot \delta = 0 \\ A\sin kl + B\cos kl = 0 \end{cases}$$

以上关于 A、B、δ 的线性方程组，若有非零解，其系数行列式应等于 0，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 - \dfrac{\beta}{P} \cdot l \\ k & 0 & \dfrac{\beta}{P} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0$$

得到特征方程：$\dfrac{\beta}{P} \cdot \sin kl + k \cdot \cos kl \cdot (1 - \dfrac{\beta}{P} \cdot l) = 0$

整理后，有 $\tan kl - kl + \dfrac{k^3 l^3}{3} = 0$

评注：通过特征方程求结构的临界荷载，读者要熟悉其套路。

【例 15】 如图 13-24 所示，刚性的水平横梁由两根钢立柱支撑，AD 的上端铰支，下端固定；BC 柱的上、下两端均为铰支。设两立柱的截面都是边长 $a = 4\text{cm}$ 的正方形，材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$，比例极限 $\sigma_P = 200\text{GPa}$。试求能施加在横梁上的竖向压力 P 的最大值及其作用位置。（同济大学，2002 年）

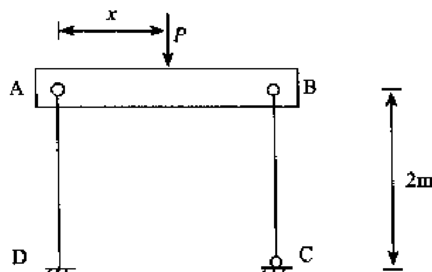


图 13-24

解 由题意，只有当压杆 AD、BC 同时达到临界压力时，竖向压力 P 达到最大值。杆 AD 的柔度是：

$$\lambda_{AD}=\frac{\mu l}{i}=\frac{0.7\times 2}{\frac{1}{\sqrt{12}}\times 0.04}=121$$

杆 BC 的柔度是：$\lambda_{BC}=\frac{\mu l}{i}=\frac{1.0\times 2}{\frac{1}{\sqrt{12}}\times 0.04}=173$

柔度的临界点是：$\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{200\times 10^6}}=100$

显然，杆 AD 和杆 BC 均是大柔度杆。

杆 AD 的临界压力是：

$$N_{ADcr}=\sigma_{ADcr}\cdot A=\frac{\pi^2 E}{\lambda_{AD}^2}\cdot a^2=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{121^2}\times(0.04)^2=215(\text{kN})$$

杆 BC 的临界压力是：

$$N_{BCcr}=\sigma_{BCcr}\cdot A=\frac{\pi^2 E}{\lambda_{BC}^2}\cdot a^2=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{173^2}\times(0.04)^2=106(\text{kN})$$

那由平衡条件 $\sum F=0,\sum M=0$ 有：

$$\begin{cases}p_{max}-N_{ADcr}-N_{BCcr}=0\\ N_{ADcr}\cdot x-N_{BCcr}\cdot(90-x)=0\end{cases}$$

$$P_{max}=215+106=321\text{kN},x=30\text{cm}$$

评注：由于竖向压力 P 等于两压杆压力之和，只有各压杆的压力达到临界压力值时，竖向压力 P 才能达到最大。

【例 16】 如图 13-25 所示，水平刚性杆 AB 由 AC、BD 两根相同长度，相同材料的杆支撑。AC 杆两端铰支，截面为正方形，边长 $a=45\text{mm}$，BD 杆 B 端铰支，D 端固定，截面为空心圆，外直径 $D=50\text{mm}$，内直径 $d=40\text{mm}$，材料的弹性模量 $E-2\times10^5\text{MPa}$，临界应力抛物线公式为 $\sigma_{cr}=235-0.00668\times\lambda^2(MPa)$，区分细长杆和非细长压杆的柔度值 $\lambda_c=123$，稳定安全系数 $n=3$，设荷载 Q 作用点可以在 AB 长度内移动。

(1) 当载荷位于 AB 杆中点，即 $x=1.5\text{m}$ 时，结构的许可荷载[Q]；

(2) 当 x 为何值时，结构的许可载荷值为最大？此最大值$[Q]_{max}=$?（同济大学，2001 年）

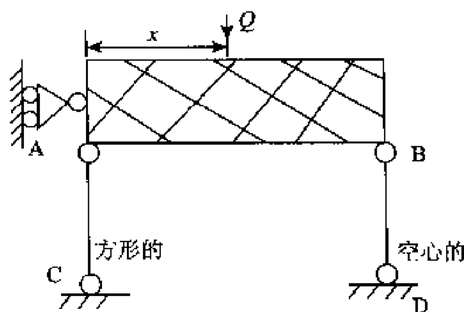


图 13-25

解 杆 AC 的柔度是：$\lambda_{AC}=\frac{\mu l}{i_{AC}}=\frac{1.0\times 2}{\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0.045}=154>\lambda_c=123$，属大柔度杆。

其临界载荷是：

$$N_{ACcr}=\sigma_{ACcr}\cdot A=\frac{\pi^2 E}{\lambda_{AC}^2}\cdot a^2=\frac{\pi^2\times 2\times 10^5\times 10^6}{154^2}\times(0.045)^2=168(\mathrm{kN})$$

BD 杆的截面惯性矩是：

$$\tau=\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)=\frac{\pi\times(0.05)^4}{64}\times\left[1-\left(\frac{40}{50}\right)^4\right]=1.8\times 10^{-7}(\mathrm{m}^4)$$

其惯性半径是：$i_{BD}=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{1.8\times 10^{-7}}{\frac{1}{4}\pi(0.05^2-0.04^2)}}=0.016(\mathrm{m})$

其柔度是：$\lambda_{BD}=\frac{\mu l}{i_{BD}}=\frac{0.7\times 2}{0.016}=88<\lambda_c=123$，属中柔度杆。

其临界压力是：

$$N_{BDcr}=\sigma_{BCcr}\cdot A=(235-0.00668\times 88^2)\times 10^6\times\frac{1}{4}\times\pi\times(0.05^2-0.04^2)=130\mathrm{kN}$$

(1) 若荷载处于 AB 杆中点，两压杆压力相等，即 $N_{AC}=N_{BD}=\frac{Q}{2}$。由结构的稳定性要求得到：

$$\frac{N_{ACcr}}{N_{AC}}=\frac{168}{\frac{Q}{2}}\geqslant n=3, Q\leqslant\frac{168\times 2}{3}=112(\mathrm{kN})$$

$$\frac{N_{BDcr}}{N_{BD}}=\frac{130}{\frac{Q}{2}}\geqslant n=3, Q\leqslant\frac{130\times 2}{3}=87(\mathrm{kN})$$

比较两荷载大小得到$[Q]=87\mathrm{kN}$

(2) 若使结构的许可荷载最大，两压杆也同时达到许可压力，即

$$\begin{cases}N_{AC}=\frac{N_{ACcr}}{n}=\frac{168}{3}=56(\mathrm{kN})\\ N_{BD}=\frac{N_{BDcr}}{n}=\frac{130}{3}=43(\mathrm{kN})\end{cases}$$

此时，由平衡条件$\sum F=0,\sum M=0$得到：

$$\begin{cases}N_{AC}+N_{BD}-Q=0\\ N_{AC}\cdot x-N_{BD}\cdot(3-x)=0\end{cases}$$

从中解出$\begin{cases}Q=56+43=99\ \mathrm{kN}\\ x=1.3\mathrm{m}\end{cases}$

即$[Q]_{max}=99\mathrm{kN}$

评注：读者应区分临界荷载和许可荷载这两个不同的概念，工程上按一定安全系数折算后的荷载值才是许可荷载。

第三节　习　题

一、填空题

1. 压杆失稳是指压杆直线状态的平衡由________过渡到________。

2. 提高压杆承载能力的措施有________、________、________到________。

二、选择题

1. 两端铰支的圆截面压杆，长 1m，直径 50mm。其柔度为________。

A. 60　　B. 66.7　　C. 80　　D. 50

2. 若压杆在两个方向上的约束情况相同；且 $\mu_y > \mu_z$。那么该正压杆的合理截面应满足的条件有四种答案：________。

A. $I_y = I_z$　　B. $I_y > I_z$　　C. $I_y < I_z$　　D. $\lambda_z = \lambda_y$

3. 如图 13-26 所示直杆，其材料相同，截面和长度相同，支撑方式不同，在轴向压力作用下，那个柔度最大，哪个柔度最小?有四种答案，正确答案是：

A. λ_a 大，λ_c 小　　B. λ_b 大，λ_d 小　　C. λ_b 大，λ_c 小　　D. λ_a 大，λ_b 小

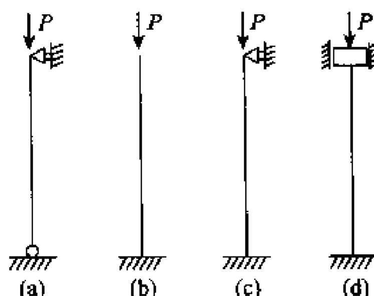


图 13-26

4. 两个压杆材料和细长比均相同，则：

A. 两杆的临界力与临界应力均相等

B. 两杆的临界应力不等，但临界力相等

C. 两杆的临界应力相等，但临界力不一定相等

D. 两杆的临界力与临界应力均不一定相等

5. 如图 13-27 所示，压杆(a)、(b) 均为细长杆，两杆的材料、杆长、截面形状和尺寸均相同，$h = 2b$，临界载荷分别为 F_{cra} 和 F_{crb}，则：________。

A. $F_{cr\cdot a} = F_{cr\cdot b}$　　B. $F_{cr\cdot a} = \frac{1}{2}F_{cr\cdot b}$　　C. $F_{cr\cdot a} > F_{cr\cdot b}$　　D. $F_{cr\cdot a} = \frac{1}{4}F_{cr\cdot b}$

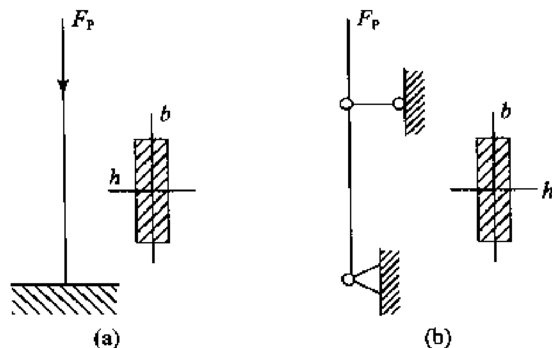


图 13-27

三、判断题

正三角形截面压杆，如图 13-28 所示，其两端为球铰链约束，加载方向通过压杆轴线。当载荷超过临界值，压杆发生屈曲时，横截面将绕通过形心 C 的任意轴转动。

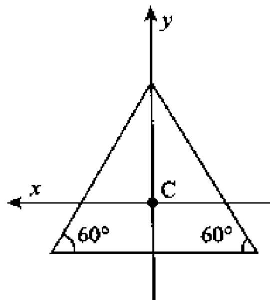


图 13-28

四、计算题

1. 由五根直径为 $d=50\text{mm}$ 的圆钢杆组成正方形结构，如图 13-29 所示，结构连接处均为光滑铰链，正方形边长 $a=1\text{m}$，材料为 Q235 钢，试求结构的临界载荷值。（Q235 钢，当 $\lambda \leqslant \lambda_P = 132$ 时，$\sigma_{cr}=(235-0.0068\lambda^2)\text{MPa}$。）

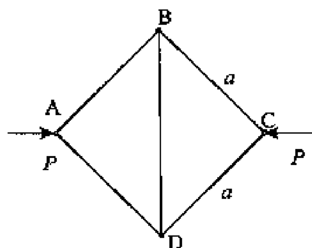


图 13-29

2. 如图 13-30 所示结构，梁和杆的材料相同，AB 梁为 $N_0 16$ 工字钢，BC 为直径 $d=60\text{mm}$ 的圆形截面杆，已知：材料的 $E=205\text{GPa}$，$\sigma_s=275\text{MPa}$，强度安全系数 $n=2$，$\lambda_p=90$，$\lambda_s=50$，稳定安全系数 $n_{st}=3$，经验公式 $\sigma_{cr}=338-1.12\lambda$，试求：$[F]$。

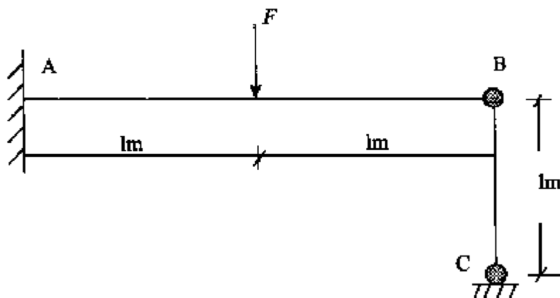


图 13-30

3. 平面结构如图 13-31 所示，重物 $Q=10\text{kN}$，从距离梁 40mm 的高度自由下落至 AB 梁中点 C，梁 AB 为工字形截面，$I_z=15760\times10^{-8}\text{m}^4$，杆 BD 两端为球形铰支座，采用 $b=5\text{cm}$，$h=12\text{cm}$ 的矩形截面。梁与杆的材料相同，$E=200\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，$\sigma_s=235\text{MPa}$，$a=304\text{MPa}$，

$b = 1.12\text{MPa}$,$n_{st} = 3$,问杆 BD 是否安全。

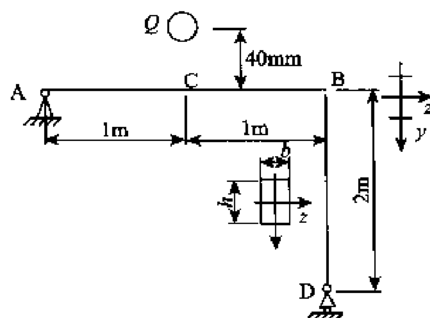


图 13-31

4. 有一两端固定的圆截面直杆，直径 $d = 8\text{mm}$，长度 $l = 25.7\text{cm}$，材料的 $\text{E} = 210\text{GPa}$，直杆所受压力 $P = 1.76\text{kN}$，规定安全系数 $n = 4$，试校核该直杆的稳定性。

5. 在如图 13-32 所示结构中，AB 为圆形截面杆，$d = 80\text{mm}$，A 端固定，B 端球铰，BC 为正方形截面杆，边长 $a = 70\text{mm}$，C 端为球铰。AB 杆和 BC 杆可以各自独立发生变形，两杆的材料均为 A3 钢，$\text{E} = 210\text{GPa}$。已知 $l = 3\text{m}$，稳定安全系数 $n = 2.5$。试求此结构许可载荷 P。

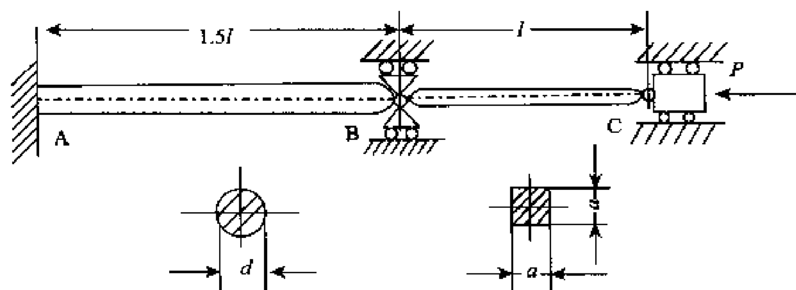


图 13-32

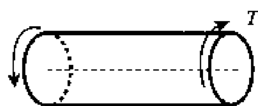
部分院校考研入学试题

西安交通大学2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

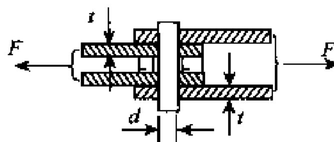
一、简答题(共5小题,每小题6分,共30分)

1. 疲劳破坏是如何发生的?其断口有何特征?

2. 试述圆轴扭转时扭转角 φ 与切应变 γ 之间的关系并作简图示意。



题2图



题3图

3. 自行车链条传动的销钉连接局部如图所示,销钉直径为 d,链板厚度为 t,骑行时最大拉力为F,指出剪切和挤压危险面,写出最大切应力和最大挤压力的表达式。

4. 何为单向、二向、三向应力状态?各画一单元体示意图。

5. 试说明为何楼板、自行车架等弯曲构件是空芯截面。

二、单项选择题(共5小题,每小题4分,共20分)

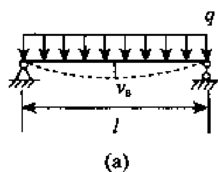
6. 用5倍试样和10倍试样分别做同一种塑性材料拉伸破坏试验时,发生颈缩后的延伸率 δ_5 和 δ_{10},比较二者________。

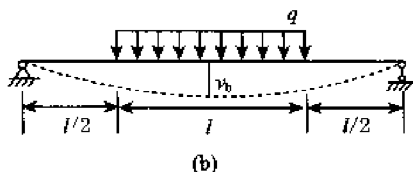
A. $\delta_5 = \delta_{10}$　　B. $\delta_5 > \delta_{10}$　　C. $\delta_5 < \delta_{10}$　　D. 无法确定哪一个更大

7. 承受均布载荷作用的简支梁(图a)如果梁的长度增加一倍而载荷不变(图b),则最大挠度 v_a 与 v_b 比较________。

A. $2v_a < v_b < 4v_a$　　B. $4v_a < v_b < 8v_a$

C. $8v_a < v_b < 16v_a$　　D. 无法确定其比值范围

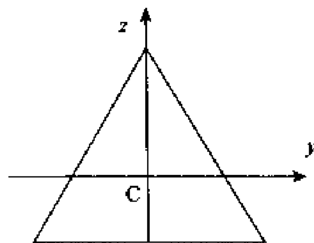




题7图

8. 题8图示等边三角形C为形心,对 y 轴和 z 轴的惯性矩 I_y 与 I_z 比较________。

A. $I_y = I_z$　　B. $I_y > I_z$　　C. $I_y < I_z$　　D. 无法确定哪一个更大



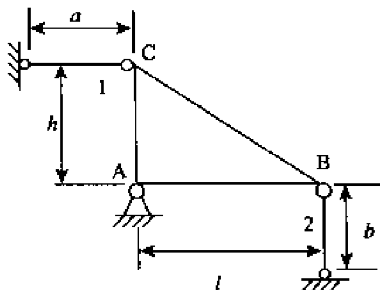
题8图

9. 对同一个单元体的应力状态，用第三强度理论和第四度理论计算的相当力 σ_{r3} 与 σ_{r4}，比较二者________。

A. $\sigma_{r3}=\sigma_{r4}$　　B. $\sigma_{r3}>\sigma_{r4}$　　C. $\sigma_{r3}<\sigma_{r4}$　　D. 无法确定固定关系

10. 题10图示刚性板ABC上作用平面力系，约束杆1、杆2材料相同，面积相等，其内力 N_1 与 N_2 比较二者________。

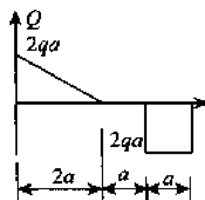
A. $N_1=N_2$　　B. $N_1>N_2$　　C. $N_1<N_2$　　D. 无法确定固定关系

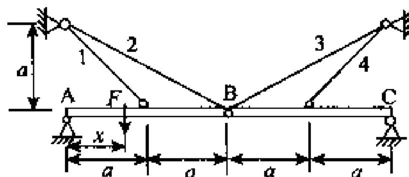


题10图

三、计算题(共6小题，共100分)

11. 已知简支梁上没有集中力偶作用，剪力图如题图11所示，试画出梁上的载荷与弯矩图。



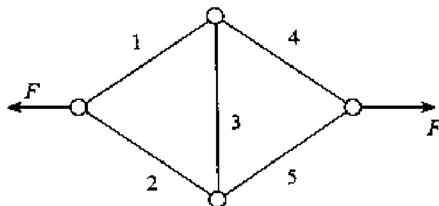


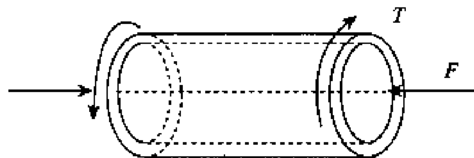
题11图　　　　题12图

12. 悬索桥由AB梁和BC梁加4根材料，截面都相同的的悬索组成如题图12所示，梁视为刚性，车辆视为集中力载荷，车辆通过时欲测载荷大小 F，至少需要测出哪几根悬索的变形，并写出 F 与各杆最大变形 Δl 之间的关系(悬索抗拉压刚度EA为常数)。(15分)

13. 题图13示平面桁架由长度 $l=1\text{m}$，直径 $d=40\text{mm}$ 的图截面杆构成，已知 $E=206\text{GPa}$，$\lambda_P=100$，$\lambda_s=60$，中长杆材料系数 $a=460\text{MPa}$，$b=2.567\text{MPa}$，安全因数 $[n]=3$。

(1)试求许可载荷 F；(2)如果载荷方向相反(向里)，许可载荷 F 是否改变？若改变则其值为多少？(20分)



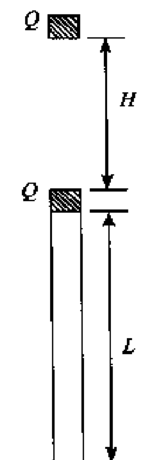


题13图　　　　题14图

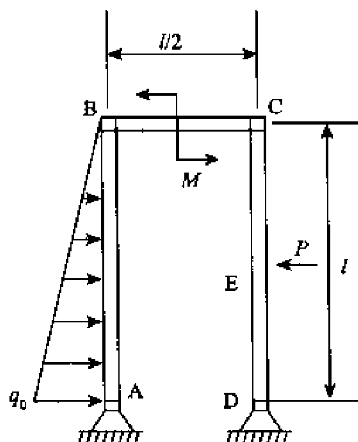
14. 螺旋架主轴为外径 $D=140\text{mm}$，内径 $d=100\text{mm}$ 的厚框圆筒，已知需要产生

$F = 200\text{kN}$ 的轴向推力，$[\sigma] = 100\text{MPa}$，(1)用第三强度理论求主轴所能承受的最大扭矩 T；(2)设弹性模量 $E = 200\text{GPa}$，泊松比 $\mu = 0.3$，求轴内的最大线应变和最大切应力。(20 分)

15. 等截面直杆长度为 L，抗拉(压)刚度为 EA，顶部作用重为 Q 的刚性重物，再受到高度为 H，重量为 Q 的自由落体冲击，试求杆中的最大冲击力。(15 分)



题 15 图



题 16 图

16. 图示平面机构，已知：$AB = CD = l = 3\text{m}$，$BC = l/2$，各杆自重不计，$q_0 = 500\text{N/m}$，$M = 300\text{N}\cdot\text{m}$。求为保持机构平衡，需在 CD 杆中点 E 作用多大的力 P，及 A，D 处约束反力大小。

北京航空航天大学 2006 年研究生入学考试试题

一、选择题(本题共 15 分,每小题各 5 分)

1. 如果细长压杆有局部削弱,此种削弱对压杆有四种答案,正确答案是:________。

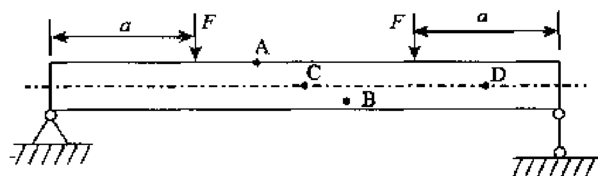
A. 对稳定性和强度都有显著影响

B. 对稳定性和强度都影响甚微

C. 对稳定性有显著影响,对强度影响甚微

D. 对稳定性影响甚微,对强度有显著影响

2. 图示矩形截面梁的 A、B、C、D 四点中,单向应力状态的点是________,纯剪应力状态的点是________,在任何截面上应力均为零的点是________,其中,A 位于上表面 C、D 位于中性轴上。



题一 1 图

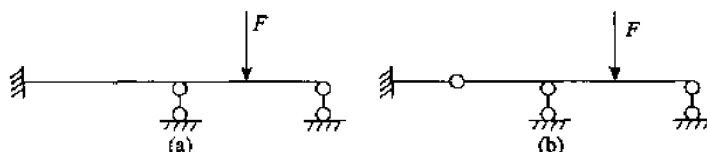
3. 某线弹性结构在 F_1 单独作用下的外力功 $W_1=\frac{1}{2}F_1\Delta_1$,在 F_2 单独作用下的外力功 $W_2=\frac{1}{2}F_2\Delta_2$,其中 Δ_1 和 Δ_2 为沿相应载荷方向的位移,设在 F_1 和 F_2 共同作用下的外力功为 $W_{总}$,则________。

A. 一定有 $W_{总}=W_1+W_2$　　B. 一定有 $W_{总}>W_1+W_2$

C. 一定有 $W_{总}<W_1+W_2$　　D. 无法判定

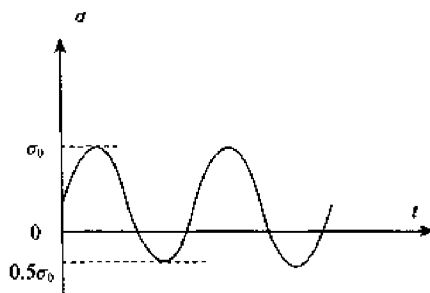
二、填空题(本题共 18 分,每小题各 6 分)

1. 图 a 和图 b 所示梁的静不定度分别为________度和________度。



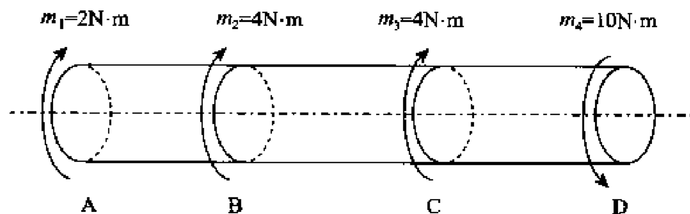
题二 1 图

2. 试件受如下图所示交变应力作用,该交变应力的应力比为________,应力幅为________。



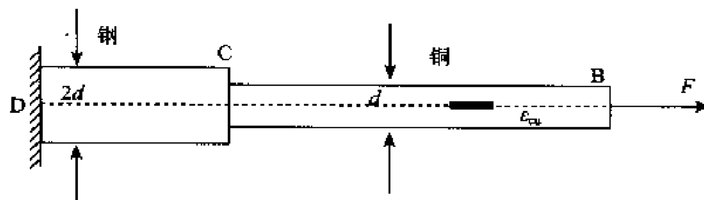
题二 2 图

3. 圆轴受力如图，其危险截面在________段，当外力偶 m_3、m_4 互换以后，危险截面在________段。



题二 3 图

三、(本题 15 分)图示阶梯杆由钢(DC 段)和铜(CB 段)两种材料制成，承受轴向载荷 F 作用，$d=40\text{mm}$，钢的弹性模量和许用应力分别为 $E_{st}=210\text{GPa}$，$[\sigma_{st}]=160\text{MPa}$，铜的弹性模量和许用应力分别为 $E_{cu}=100\text{GPa}$，$[\sigma_{cu}]=100\text{MPa}$，在 CB 段所贴应变片测得的轴向正应变为 $\varepsilon_{cu}=1.0\times10^{-3}$，校核此杆强度并求 DC 的轴向正应变 ε_{st}。

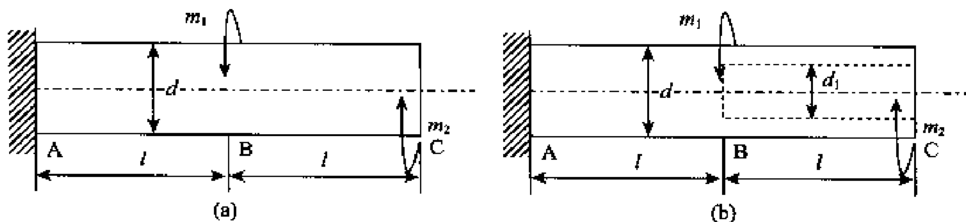


题三图

四、(本题 15 分)图 a 所示等截面圆轴，已知 $d=100\text{mm}$，$l=500\text{mm}$，$m_1=8\text{kN}\cdot\text{m}$，$m_2=3\text{kN}\cdot\text{m}$，$G=82\text{GPa}$，求：

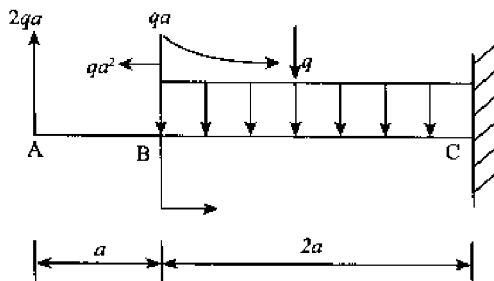
(1)最大切应力及 C 截面的扭转角；

(2)为使 BC 段的单位长度扭转角(绝对值)与 AB 段的相等，则在 BC 段钻孔(图 b)的孔径 d_1 应为多大？



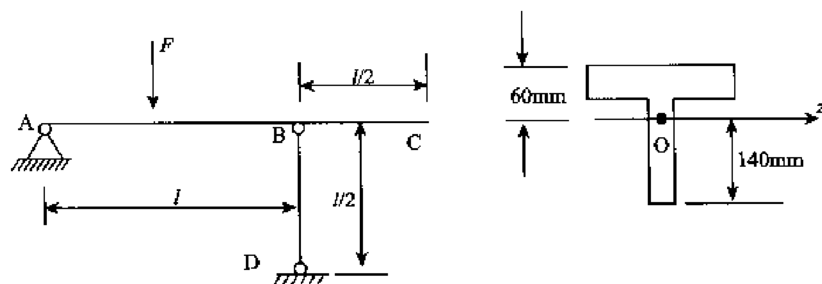
题四图

五、(本题 15 分)试画图示悬臂梁的剪力、弯矩图。



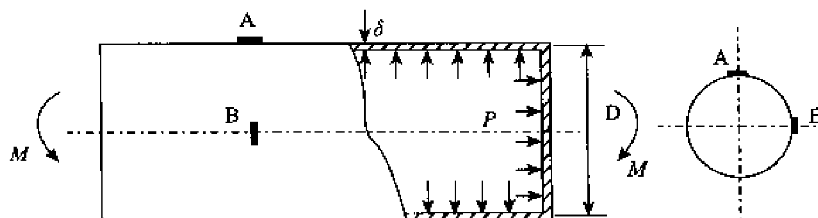
题五图

六、(本题 20 分)图示结构，AC 为 T 字型铸铁梁，许用拉压应力分别为 $[\sigma_+]=30\text{MPa}$，$[\sigma_-]=60\text{MPa}$(不考虑弯曲切应力，O 为截面形心)；BD 为圆截面钢杆，强度许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，弹性模量为 $E=200\text{GPa}$，载荷 F 可在 AC 范围内移动，试确定许用载荷$[F]$。已知：$l=2\text{m}$，铸铁梁的 $I_z=4\times10^7\text{mm}^4$，圆截面钢杆 $d=25\text{mm}$，其适用欧拉公式的临界柔度 $\lambda_P=100$，中柔度压杆的临界应力为 $\sigma_{cr}=304-1.12\lambda$，稳定安全因数为 2.5。



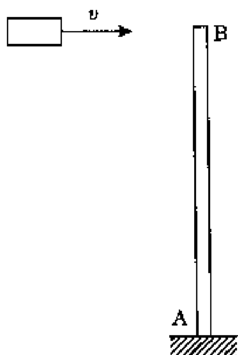
题六图

七、(本题 15 分)图示闭口薄壁圆筒受内压 P 和弯曲力偶 M 的联合作用，今测得 A 点轴向应变 $\varepsilon_0=4\times10^{-4}$，B 点沿圆周线方向的正应变 $\varepsilon_{90}=2\times10^{-4}$，已知薄壁圆筒的外径 $D=60\text{mm}$，壁厚 $\delta=2\text{mm}$，$E=200\text{GPa}$，$\mu=0.25$，$[\sigma]=150\text{MPa}$，(1)画出 A 点的微体受力状态图。(2)求出弯曲力偶矩 M 和内压 P 的大小。(3)试用第三强度理论校核筒的强度。



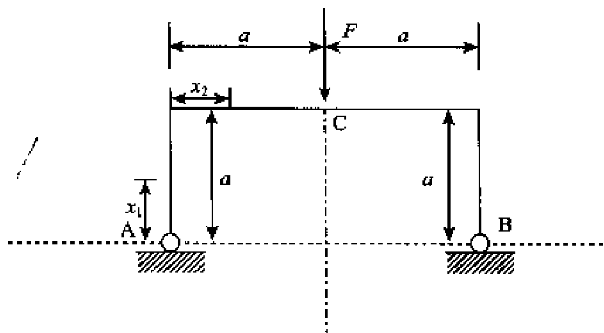
题七图

八、(本题 15 分)一重量为 Q 的物体以速度 v 沿水平方向冲击等截面直杆 AB 的顶端 B，杆长度为 a，弯曲刚度为 EI，抗弯截面系数为 W，略去剪力的影响，试求 AB 的杆的最大正应力。



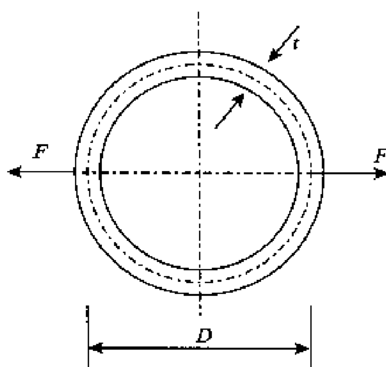
题八图

九、(本题 15 分)等截面折杆 ABC 的弯曲刚度为 EI，在 C 截面处作用一铅重载荷 F。略去轴力和剪力的影响，求截面 C 的铅垂位移。(A,B 处为固定铰支座)



题九图

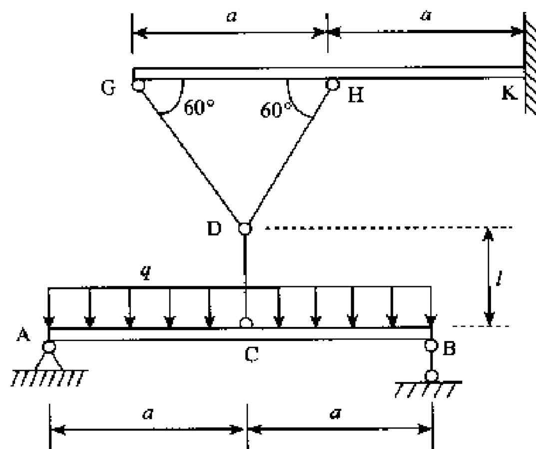
十、(本题 7 分)一薄圆环，其厚度为 t，平均直径为 D，宽度为 b(t, $b \ll D$)，载荷如图所示，试根据功的互等定理求变形前后圆环中心线所围面积的改变量。



题十图

北京理工大学2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

一、(25分)如图所示，梁AB受均布载荷q作用，长度为$l=\frac{a}{2}$的铅垂杆CD与杆DG、DH铰接于D，并在C、G、H处分别与梁AB及梁GK铰接，二梁的弯曲刚度均为EI，三杆的拉压刚度为EA，且梁的惯性矩I与杆的横截面面积A之比为$\frac{I}{A}=\frac{2}{l}a^2$，不计梁中的轴力和剪力的影响，试求：(1)杆CD的轴力；(2)梁GK在其中点H的挠度。



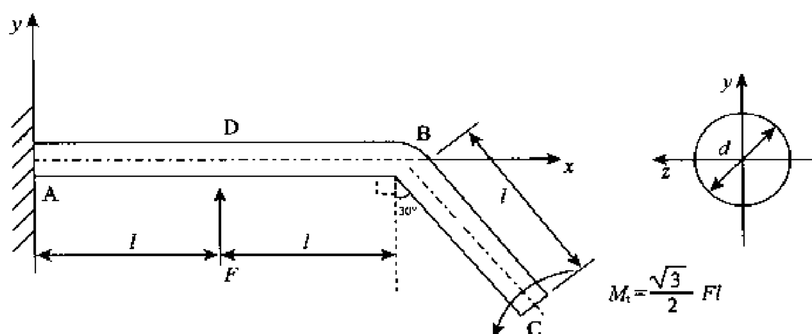
题一图

二、(25分)直径为D，长度分别为$2l$和l的两根圆截面杆AB与BC在B处焊接后构成120°角的折杆。如图所示，折杆ABC的轴线位于$x-y$面内，A为固定端。自由端C处施加了一个作用面在杆件横截面面内的力偶，力偶矩$M_t=\frac{\sqrt{3}}{2}Fl$，杆AB段中点D处作用一铅垂向上的集加中力F，不计剪力影响。

(1)分析折杆各段的变形形式，画内力图，指出校核该杆强度的危险截面的位置；

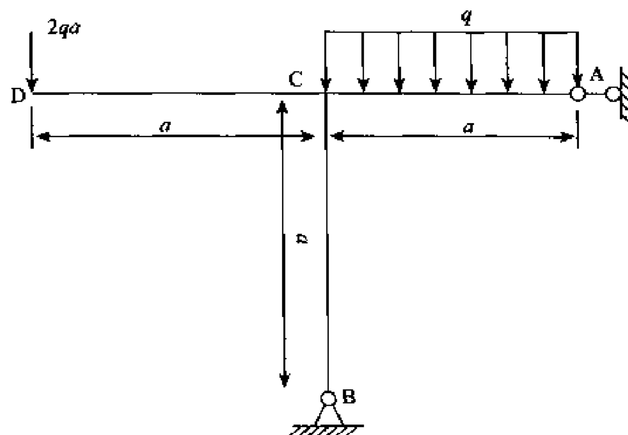
(2)找出危险截面上的危险点，画出危险点在截面上的位置的示意图；

(3)若$d=40\text{mm}, l=1\text{m}, F=400\text{N}$，折杆的许用应力$[\sigma]=85\text{MPa}$，试按第三强度理论校核该杆的强度。



题二图

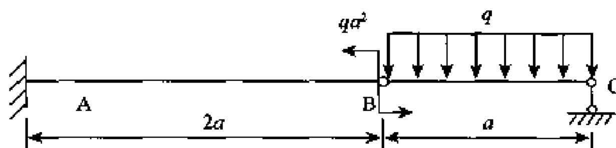
三、(25分)图示结构，AD与BC杆垂直，C为刚节点，试画出在图示载荷作用下结构的内力图。



题三图

四、(25 分)图示梁 AB,BC,在 B 截面由中间铰连接。设 AB 段梁弯曲刚度为 EI_1 ,BC 段梁弯曲刚度为 EI_2 ,且 $EI_1 = 4EI_2$ 。

求:在图示载荷和尺寸下,中间铰 B 两侧截面的相对转角 θ 。



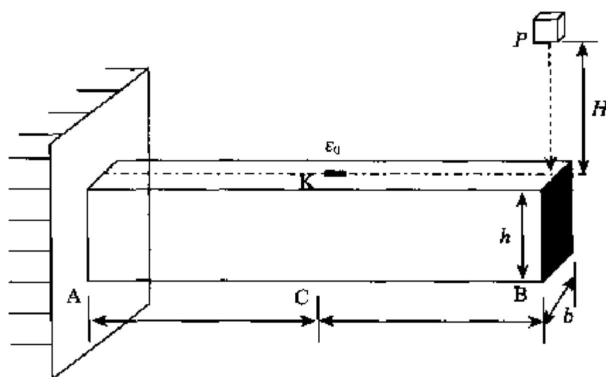
题四图

五、(25 分)矩形截面悬臂梁 AB 如图所示,A 端固定,B 端自由。横截面尺寸为 $b \times h$,长度为 $2l$,材料的弹性模量为 E,一重物自高度 $H = \dfrac{48Pl^3}{Ebh^3}$ 处自由下落冲击到 B 截面,此时测得梁中截面 C 处 K 点的线应变为 ε_0 (K 点位于截面 C 最上缘)。试求:

(1)重物的重量 P;

(2)冲击时梁内的最大动应力 $\sigma_{d,max}$;

(3)截面 C 处的动挠度 δ_{cd} 。



题五图

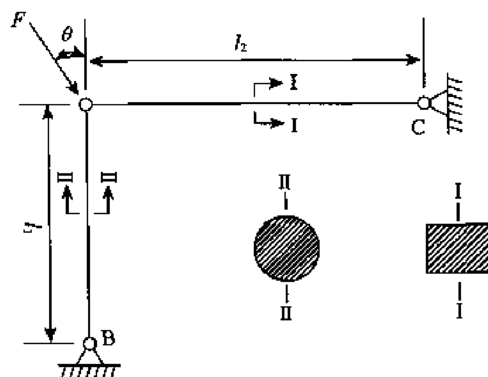
六、(25 分)图示铅垂杆 AB 和水平杆 AC 组成杆系结构,A、B、C 为球铰。二杆材料相同:$E = 200GPa$,$\lambda_p = 100$,$\lambda_s = 60$ 。杆 AB 为圆形截面,直径 $d = 24mm$,长度为 $l_1 = 500mm$,杆

AC 为矩形截面，长度为 $l_2 = 800\text{mm}$，横截面尺寸为 20mm × 23mm。设中柔度杆的稳定经验公式为 $\sigma_{cr} = (304 - 1.12\lambda)\text{MPa}$，稳定安全因数 $[n_{st}] = 5$，设二杆均在 ABC 平面内失稳。

(1)分别计算二杆的临界压力；

(2)若集中力 $F = 20\text{kN}$，且与铅垂方向的夹角 $\theta = 30°$，校核该结构的稳定性；

(3)若 θ 可在 0° ~ 90° 之间任意变化，问 θ 取何值时，可使结构中的二杆同时达到临界状态？



题六图

华中科技大学2006年招收硕士研究生入学考试试题

一、填空题(每小题3分,共24分)

1. 在材料力学的理论分析中,以均匀、________、________的可变形固体作为力学模型,且在大多数场合下局限在弹性范围内的________条件下进行研究。

2. 脆性材料的破坏一般以________为标志,所以取________作为极限应力,且由于脆性材料的强度指标的分散度较大,故选取安全系数时应多给一些________。

3. 构件正常工作应满足________、刚度和________的要求,设计构件时,还必须尽可能地合理选用材料和________,以节约资金或减轻构件自重。

4. 低碳钢在单向拉伸试验过程中,按其伸长量与载荷的关系,其工作状态大致可分为四个阶段即:弹性阶段、________、________、________和________。其中,"颈缩"现象出现在________阶段。

5. 两根相同材料的等直圆形截面拉杆,其截面半径之比为1∶2,杆长之比为1∶2,所受外力之比亦为1∶2,则它们的拉伸变形之比为________。

6. 某等截面直杆,横截面为圆环形,外径、内径分别为 D 和 d,则其截面极惯性矩为________,抗扭截面系数为________。

7. 通常,________称为杆的抗拉(压)刚度,EI称为梁的________,而等直圆杆的抗扭刚度为________。

8. 四个常用的材料破坏理论是最大拉应力理论、________理论、________理论和形状改变比能理论。

二、简答题(每小题4分,共36分)

1. 试写出在平面应力状态下的广义胡克定律的表达式。

2. 对扭转杆件,当横截面相同时,圆环形截面比实心圆截面优越,为什么?

3. 杆变形的基本形式有哪几种?举例说明何谓组合变形?

4. 同一截面处,梁的弯矩、剪力和载荷集度之间有何关系?写出其微分表达式。

5. 在材料力学中,杆的轴力、弯矩、剪力、扭矩等内力的正、负符号是如何规定的?

6. 试举例说明什么是应力集中?其对脆性材料的影响如何?

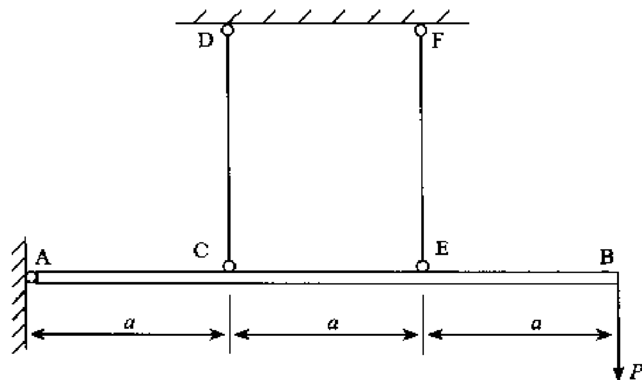
7. 试举例说明何谓超静定问题及超静定次数?求解超静定问题的关键步骤是什么?

8. 试比较说明平面弯曲、纯弯曲和横力弯曲的概念。

9. 试简述主应力的概念,并由此说明何谓空间、平面、单向应力状态。

三、计算题(共90分)

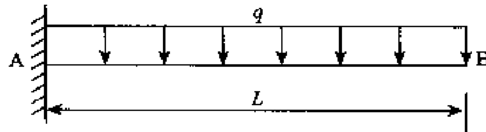
1. (20分)在图示结构中,杆AB为刚杆,链杆CD、EF材料相同、长度相等,横截面积均为 $A = 1000\text{mm}^2$,若在刚杆的B端作用载荷 $P = 50\text{kN}$,试求链杆CD、EF中的轴力和应力。



题三 1 图

2.(20 分)两端铰支的细长直杆，截面抗弯刚度为 EI，承受沿轴线的压力作用，试推导其临界力 P_{cr} 的欧拉公式。

3.(20 分)如图所示，悬臂梁 AB 的抗弯刚度为 EI，材料为线弹性体，不计剪应变对挠度的影响。试用卡氏第二定理计算该悬臂梁自由端的挠度。



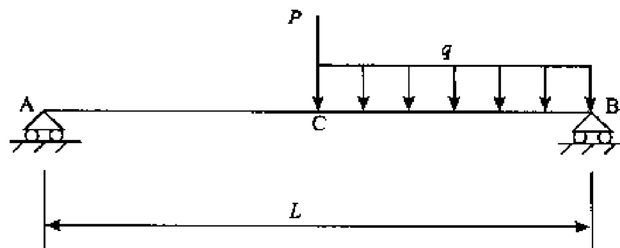
题三 3 图

4.(30 分)长为 L，抗弯刚度为 EI 的简支梁 AB，C 为其中点，梁上载荷如图。

(1)作出梁的剪力图和弯矩图；

(2)试求跨中截面的挠度 f_c；

(3)试求梁端截面的转角 θ_A 和 θ_B 。



题三 4 图

浙江大学2006年研究生入学考试试题

一、(30分)

(1)材料力学对研究对象做出了哪些基本假设？在考察梁弯曲时，又增加了何种假设？求梁弯曲剪应力时又作了什么假设？计算轴扭转时，又提出了什么假设？按您掌握的知识，上述哪些假设之间有哪些矛盾之处？并加以详细阐述，哪些假设有条件限制？同时说明要解决这些问题必须应用什么学科理论？

(2)材料力学对等圆截面A3钢进行拉伸试验时，可以获得一条拉伸曲线和一些材料参数，试画出该材料常温条件下的试验曲线(必须注明纵、横坐标定义)，并注明该曲线上的主要参数和段以及它们的物理意义。同时说明通过该试验还能获得哪些主要的材料参数。

二、(30分)

(1)已知梁的弯矩图(如图1所示，)试作梁的载荷图和剪力图。

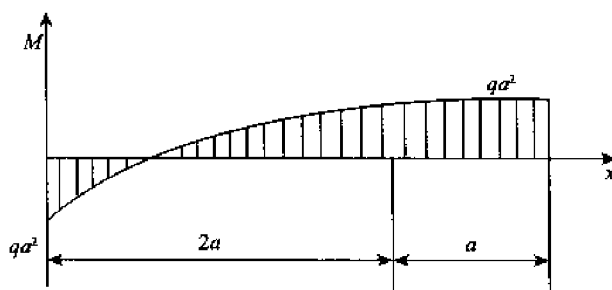


图1

(2)试用叠加法绘出图2所示梁的弯矩图和剪力图，且 $q = \frac{6P}{a}$

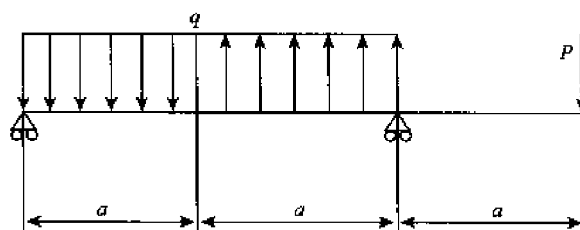


图2

三、(30分)试求图3所示静不定梁的全部反力。

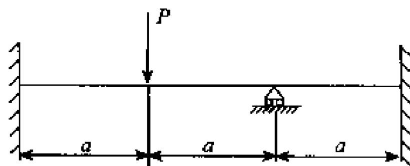


图3

四、(30分)构件上某点单元立方体的应力状态如图4所示(应力单位为MPa)。材料的弹性模量 E = 200GPa，泊松比为 $\mu = 0.3$，试求：

(1)三个主应力；(2)最大剪应力；(3)三个主应变；(4)体积应变；(5)分别按最大拉应力理论，最大拉应变理论，最大剪应力理论及形状改变比能量理论求相当应力。

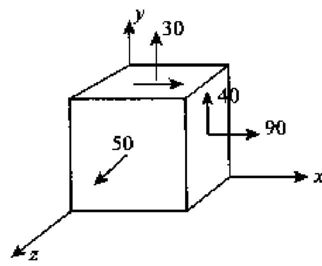


图 4

五、(30 分)如图 5 所示 AB 梁的横截面边长 40mm 正方形,CD 为直径 $d=20\text{mm}$ 的圆截面杆。A、C、D 端均为简支,$L=0.4\text{m}$,设梁、杆的材料 $[\sigma]=160\text{MPa}$,$E=206\text{GPa}$,$\mu=0.3$,并取梁、杆的安全系数均为 $n=3$,试求保证结构稳定性和强度安全条件下的 P 值。

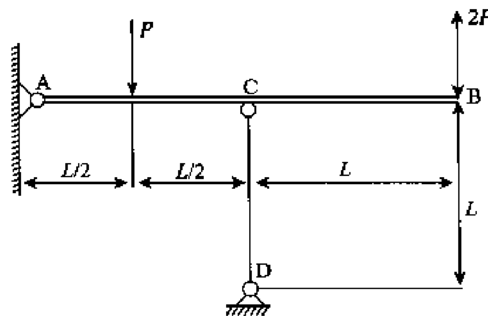


图 5

北京科技大学2006年硕士学位研究生入学考试试题

一、以下各题均备有(A)(B)(C)(D)四个选项，其中只有一个是正确的答案，试将正确的代号填写在题中____上方(共8小题，每题4分)

1. 用截面法只能确定____杆横截面上的内力。

A. 等直　　B. 弹性　　C. 静定　　D. 基本变形

2. 在下列结论中，____是错误的。

A. 若物体产生位移，则必定同时产生变形

B. 若物体各点均无位移，则必定无变形

C. 若物体产生变形，则物体内总有一些点要产生位移

D. 位移的大小取决于物体的变形和约束状态

3. 铸铁的许用应力与杆件的________有关。

A. 横截面形状　　B. 横截面尺寸

C. 受力状态(指拉伸或压缩)　　D. 载荷大小

4. 切应力互等定理是由单元体的________导出的。

A. 静力平衡关系　　B. 几何关系　　C. 物理关系　　D. 强度条件

5. 表示扭转变形程度的量________。

A. 是扭转角 φ，不是单位长度扭转角 θ　　B. 是 θ 不是 φ

C. 是 φ 和 θ　　D. 不是 φ 和 θ

6. 低碳钢试件扭转破坏是________。

A. 沿横截面拉断　　B. 沿 45° 螺旋面拉断

C. 沿横截面剪断　　D. 沿 45° 螺旋面剪断

7. 当实心圆轴的直径增加1倍时，其抗扭刚度和抗扭截面系数分别增加到原来的________倍。

A. 8和16　　B. 16和8　　C. 8和84　　D. 16和16

8. 构件发生弯曲变形时，横截面通常________。

A. 只发生线位移　　B. 只发生角位移

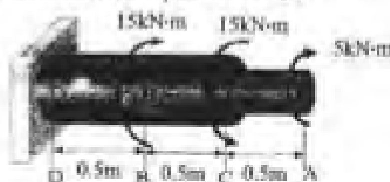
C. 发生线位移和角位移　　D. 不发生位移

二、图示圆截面阶梯轴的CD段直径为 d，AC段直径为 $0.8d$，已知轴材料的 $[\tau]=80\text{MPa}$，$G=80\text{GPa}$ 试求：

1. 画轴的扭矩图；(5分)

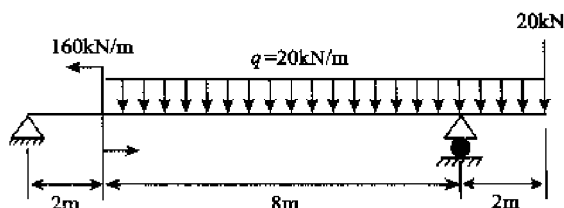
2. 确定轴的直径 d；(8分)

3. 计算截面A和截面B的相对扭转角 φ_{AB}。(5分)



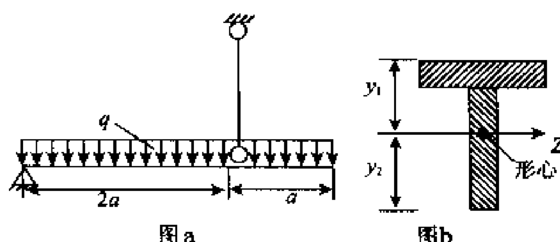
题二3图

三、拉伸梁如图示，试画剪力图和弯矩图，并求 $|Q|_{max}$、$|M|_{max}$。



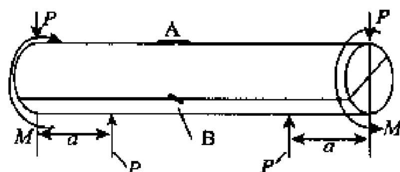
题三图

四、外伸梁用直径为 d 的圆截面杆悬吊如图 a 所示，外伸梁的横截面尺寸如图 b 所示，已知：$a=1\text{m}$，$y_1=96.4\text{mm}$，$y_2=153.6\text{mm}$，$I_z=101.5\times10^6\text{mm}^4$，梁材料的许用拉应力 $[\sigma_l]=80\text{MPa}$，许用压应力 $[\sigma_y]=140\text{MPa}$，圆截面杆的直径 $d=50\text{mm}$，许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，试求载荷集度的允许值 $[q]$。



题四图

五、(统考题)圆截面杆受力如图示，已测得轴表面 A 点与母线夹角 0°方向和 B 点与母线夹角为 −45° 方向的线应变分别为 $\varepsilon_0=400\times10^{-6}$，$\varepsilon_{-45}=375\times10^{-6}$。已知杆截面的抗弯截面模量 $W=6000\text{mm}^3$，杆材料的 $[\sigma]=140\text{MPa}$，$E=200\text{GPa}$，$\mu=0.25$。试用第三强度理论校核杆的强度。(25 分)



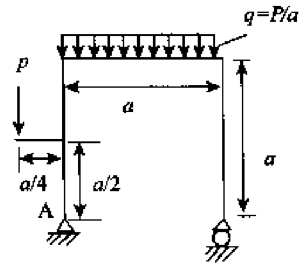
题五统考题图

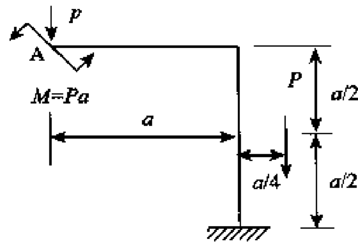
五、(单考题)图示电动机传动轴直径 $d=80\text{mm}$，电机功率 $P_k=16\text{kW}$，转速 $n=110$ 转/分，皮带轮重 $G=2\text{kN}$，直径 $D=1\text{m}$，紧边皮带张力等于松边张力 T 的 3 倍，皮带轮的受力如右侧图 b 所示，轴材料为 A3 钢，许用应力 $[\sigma]=70\text{MPa}$，试按第二强度理论计算传动轴的许可外伸长度 $[l]$。(25 分)



题五单考题图

六、(统考题)图示刚架各段 EI 为常量，已知 P、a，试用莫尔定理的图乘法求 A 截面的转角 θ_A 。(20 分)



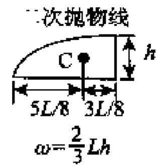


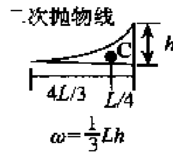
六题(统考题)题图　　　　六题(单考题)题图

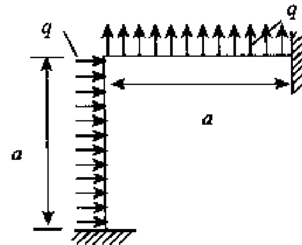
六、(单考题)图示刚架各段 EI 为常量，已知 P、a 试用莫尔定理的图乘法求 A 截面的转角 θ_A 。(20 分)

七、图示直角刚架各段 EI 为常量，已知 q，a ，试求刚架约束反力。(20 分)

备用：为使用图乘法，给出下列图







七题图

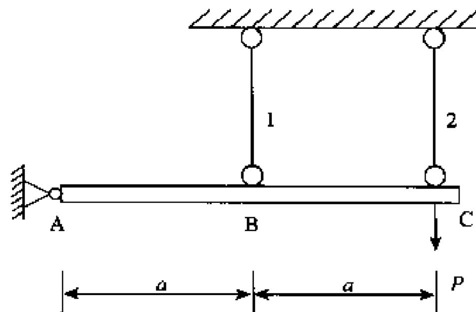
华南理工大学2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

一、单项选择题(共3小题,每题5分,共15分)

1. 图示结构,杆ABC为刚性杆,杆1、杆2的刚度相等。当杆1的温度升高时,两杆的轴力变化可能有以下四种情况,正确的答案是________。

A. 两杆轴力均变小　　B. 两杆轴力均增大

C. 杆1轴力减小,杆2轴力增大　　D. 杆1轴力增大,杆2轴力减小

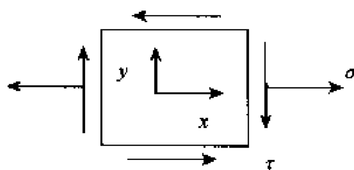


题一1图

2. 对于图示的应力状态,若测出x、y方向的正应变ε_x、ε_y,则能确定材料的________。

A. 弹性模量和泊松比　　B. 弹性模量和剪切弹性模量

C. 泊松比和剪切弹性模量　　D. 弹性模量、剪切弹性模量和泊松比

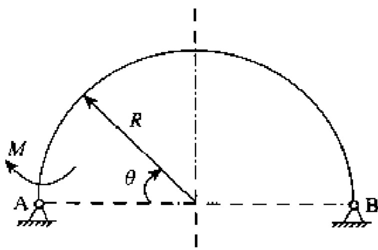


题一2图

3. 线弹性材料半圆曲梁的支撑及受力如图所示,$M(\theta)$为外力引起的任意横截面上的弯矩,关于积分:$\frac{1}{EI}\int_0^{\pi} M(\theta)Rd\theta$的含义应该是________。

A. A截面转角　　B. B截面转角

C. B的水平位移　　D. A、B两截面的相对转角

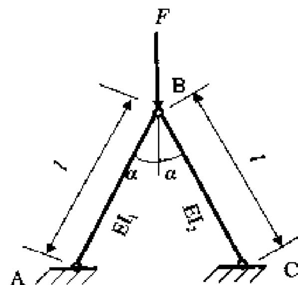


题一3图

二、简答题(共 2 小题,每题 10 分,共 20 分)

1. 一低碳钢直杆,杆长 $l=1\text{m}$,弹性模量 $E=200\text{GPa}$,杆横截面面积 $A=5\text{cm}^2$。当加拉力 $F=150\text{kN}$ 时,测得变形量 $\Delta l=4\text{mm}$,求此时卸载后杆的残余应变 ε_p。

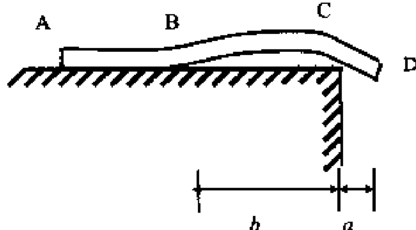
2. 图示结构,AB 和 BC 是两根细长杆,若 $EI_1>EI_2$,求结构的临界载荷 F_{cr}。



题二 2 图

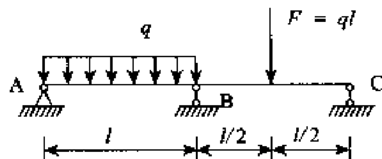
三、计算题(共 6 题,共 115 分)

1. 单位长度重量为 q、抗弯刚度为 EI 的均匀钢条放置在水平刚性平面上,钢条的一端伸出水面一小段 CD,若 $CD=a$,求钢条翘起而不与水平面接触的 BC 段长度 b。(20 分)



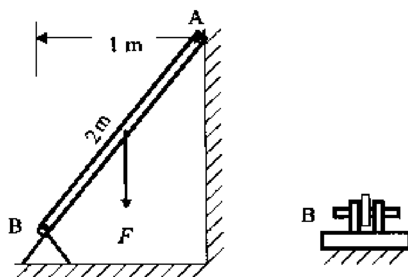
题三 1 图

2. 试作图示等刚度连续梁 AC 的弯矩图,梁的抗弯刚度为 EI。(20 分)



题三 2 图

3. 在图示 2m 长的 AB 杆的跨中心作用载荷 $F=15\text{kN}$,B 端为铰链支座,A 端靠在光滑铅垂直面上,若 $[\tau]=65\text{MPa}$,求 B 铰链中圆柱销的最小直径 d。(20 分)



题三 3 图

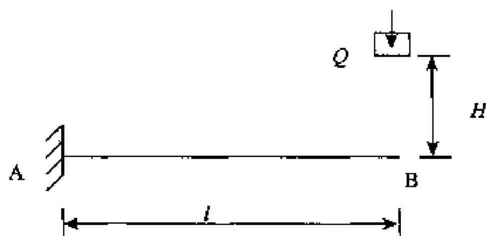
4. 矩形等截面悬臂梁高 h,宽 b,长 l。重量为 Q 的重物从高 $H=60Ql^3/EI$ 处落到自由端

并附着它。梁的质量不计，E 为材料的弹性模量，I 为截面的惯性矩。求：

(a)梁内最大的冲击正应力；

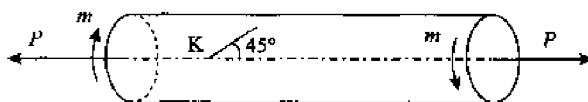
(b)将梁设计成两段等长的阶梯梁(各长 $l/2$)，梁高 h 保持不变，各段梁宽可按要求设计。阶梯梁在靠自由端一段宽 b_1，靠固定端一段宽 b_2，在两段梁最大冲击正应力相等的条件下，求 b_1/b_2 的值；

(c)对于(b)中设计的 b_1/b_2 的阶梯梁，在与等截面梁的最大冲击正应力相等的条件下，求阶梯梁与等截面梁的重量比。(20 分)



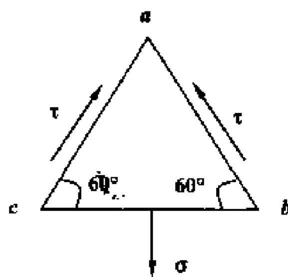
题三 4 图

5. 图示圆杆，$d=200\text{mm}$，$P=200\pi\text{kN}$，$E=200\text{GPa}$，$\upsilon=0.3$，$[\sigma]=170\text{MPa}$，在杆表面上 K 点处沿 45°方向的应变为 $\varepsilon=-0.0003$。试用第四强度理论校核该杆的强度。(20 分)



题三 5 图

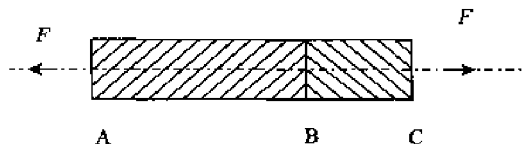
6. 自平面受力物体内取出一微体，其上受应力 σ 及 $\tau=\sigma/\sqrt{3}$ 如图示。求此点的三个主应力及画出其主单元体。(15 分)



题三 6 图

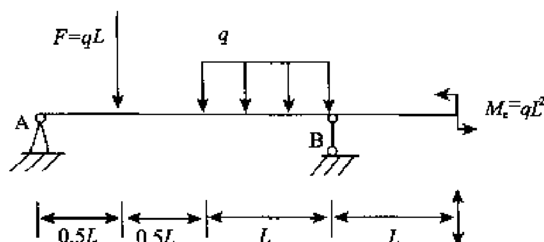
南京航空航天大学 2006 年硕士研究生入学考试试题

一、某杆件 AC 如图所示，受轴向拉力 F 作用，总伸长量 $\Delta L_{AC} = 0.2\text{mm}$，该杆件中，AB 段材料是钢，弹性模量 $E = 210\text{GPa}$，长度为 90mm，BC 段材料是铝，弹性模量 $E = 70\text{GPa}$，长度为 30mm，两段的截面均为圆形且直径均为 10mm，两段变形均处于弹性阶段，求轴向拉力 F 的大小。(15 分)



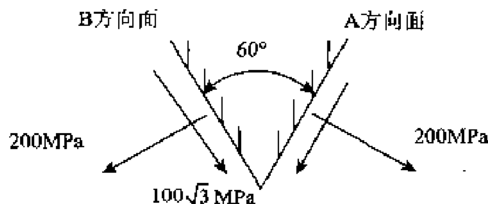
第一题图

二、作图示结构的力图和弯矩图。(10 分)



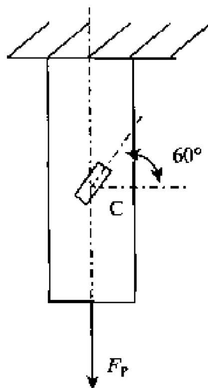
第二题图

三、某点的两个方向面的应力如图，求其主应力、最大切应力及主平面的方位。(15 分)



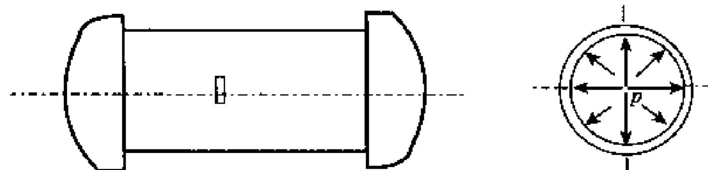
第三题图

四、图示钢质圆杆，上端固定，下端承受轴向拉力 F_P 作用，由实验测得 C 点与水平线夹 60° 方向上的线应变 $\varepsilon_{60} = 410 \times 10^{-6}$，若已知材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$，泊松比 $\mu = 0.28$，钢杆直径 $d = 20\text{mm}$，求：轴向拉力 F_P。(15 分)



第四题图

五、图示薄壁容器承受内压 p 作用，为了测量所受内压 p 大小，用电阻应变片测得环向应变的平均值为 $\varepsilon_\theta = 350\times10^{-6}$，若已知材料的弹性模量 $E = 210GPa$，泊松比 $\mu = 0.25$，容器平均直径 D=500mm，壁厚 $\delta = 10mm$，求内压 p。(15 分)

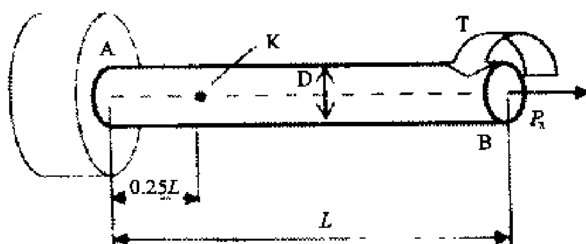


第五题图

六、直径 D=60mm，长 $L = 2m$ 的实心圆轴，材料弹性常数 $E = 200GPa$，泊松比 $\mu = 0.30$，$[\sigma] = 200MPa$，受力偶矩 $T = 3kN$ 和集中力 $P_x = 100kN$ 作用。试求：

1. B 截面的扭转角 φ_B，$\left(G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\right)$。

2. 用单元体描述该圆轴外表面 K 点的应力。

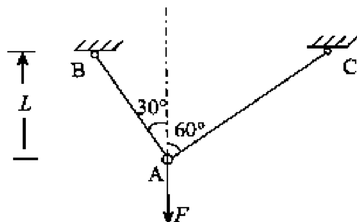


第六题图

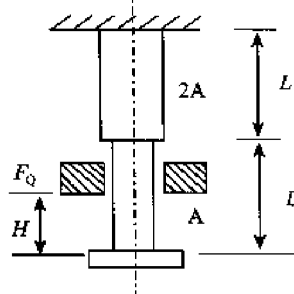
3. 计算 K 点的三个主应力并用最大剪应力强度理论(第三强度理论)校核强度。(20 分)

七、图中 AB、AC 两杆均为铰接，已知弹性模量均为 E，横截面面积均为 A，求在外力 F 作用下 A 点的垂直位移。(15 分)

八、图示阶梯杆上端固定，已知横截面积为 2A，下段横截面积为 A，长度均为 L，且材料弹性模量均为 E，当重为 F_Q 的物体从 H 高度自由落下时，求杆内的最大应力。(15 分)



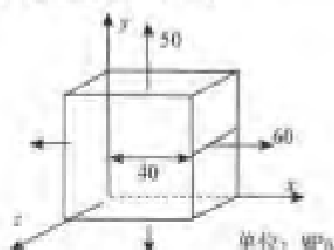
第七题图



第八题图

上海交通大学2006年硕士研究生入学考试试题

1. 图示单元体，求主应力和最大切应力。（6分）



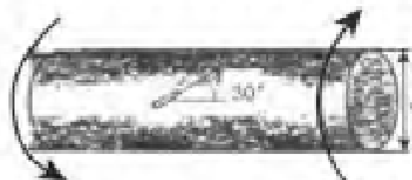
题1图

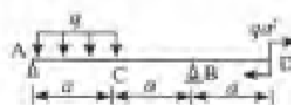
2. 已知塑性材料的许用应力为$[\sigma]$，泊松比为μ，如果用第四强度理论（形状改变比能理论）来确定材料的纯剪切条件下许用切应力：$[\tau]=\alpha[\sigma]$，试确定系数α。（7分）

3. 圆截面杆件产生拉伸、弯曲和扭转组合变形，设危险点的拉伸正应力为σ_t，弯曲正应力为σ_w，扭转切应力为τ，若按第三强度理论校核其强度，试问应该按以下哪个公式计算其相当应力。（7分）

(1) $\sigma_{r3}=\sigma_t+\sqrt{\sigma_w^2+4\tau^2}$ (2) $\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma_t^2+\sigma_w^2+4\tau^2}$ (3) $\sigma_{r3}=\sqrt{(\sigma_t+\sigma_w)2+4\tau^2}$

4. 扭转力偶$T=2.5\mathrm{kN\cdot m}$，作用在直径$d=60\mathrm{mm}$的钢轴上，已知材料的弹性模量$E=200\mathrm{GPa}$，泊松比$\mu=0.3$，试求圆轴表面上与轴线成$\alpha=30°$方向上的正应变。（10分）

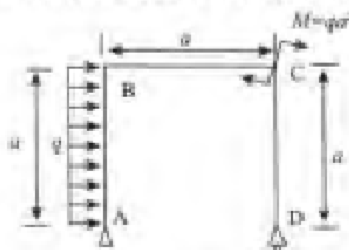




题4图 题5图

5. 作梁的剪力图和弯矩图，并标明最大值。（10分）

6. 图示刚架，A为定铰支座，D为动铰支座，画出刚架的内力图。（10分）

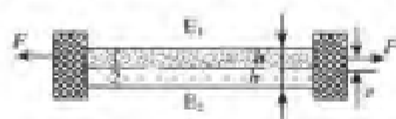


题6图

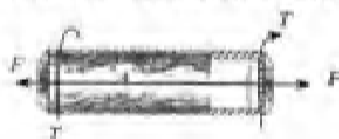
7. 两根材料不同但截面尺寸相同的矩形截面杆件1和2，每根杆的截面高度为h，同时固定于两端的刚性板上，设弹性模量为$E_1>E_2$，若使两杆都均为拉伸，试求拉力F的偏心距e。（10分）

8. 图示为强度极限为σ_b的脆性材料的薄壁截面圆筒，首先施加拉力F，使筒的横截面上拉应力达到$\sigma_b/2$时保持不变。然后施加扭矩T，直至破坏。如果筒的破坏发生在第一强度理论相当于应力σ_{r1}达到σ_b的时候，试确定：

(1)筒破坏时壁上 A 点由扭矩 T 引起的切应力大小;(2)筒的破坏面的方位。(10 分)

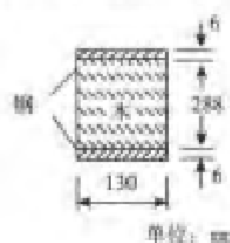


题 7 图

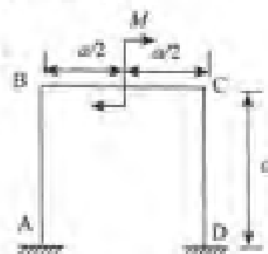


题 8 图

9. 矩形截面梁由中间木材和上下加固钢板牢固结合而成,截面尺寸如图所示,承受弯矩 $M = 20\text{kN}\cdot\text{m}$ 。钢板比较薄,可以认为应力均匀分布。已知钢和木材的弹性模量分别为 $E_s = 200\text{GPa}$,$E_w = 10\text{GPa}$,求钢板和木材部分的最大正应力。(20 分)



题 9 图

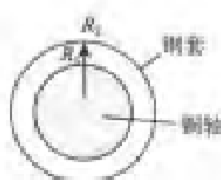


题 10 图

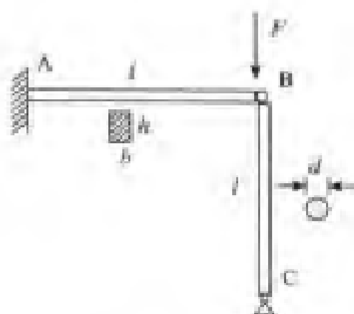
10. 如图 Π 形刚架承受力偶矩 M 作用,已知刚架的抗弯刚度为 EI,试求 C 点转角。(20 分)

11. 一组合轴,由内圆柱和外圆柱组成。内圆柱为铜,剪切弹性模量为 G_c ,外圆柱为钢,剪切弹性模量为 G_s ,两者在交界面上牢固结合,钢套的内、外半径分布为 R_1、R_2 ,在扭矩 T 作用下,试推导出扭转时的切应力和扭转率公式。(20 分)

12. 图示悬臂梁 AB 和圆截面杆 BC 在 B 点铰接,梁 AB 和杆 BC 长度均为 $l = 1\text{m}$,材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$,梁 AB 截面宽 $b=50\text{mm}$,高 $h=80\text{mm}$,杆 BC 直径 $d=30\text{mm}$,试求临界压力 F_{cr} 。(20 分)



题 11 图



题 12 图

华南理工大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

一、填空题，答案填在答题纸上（每题 3 分，共 18 分）

1. 梁的截面为对称的空心矩形，两端受力偶矩 M_0 作用，如图 1-1 所示。该梁的抗弯模量 W 为________。

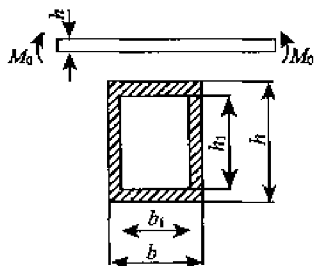


图 1-1

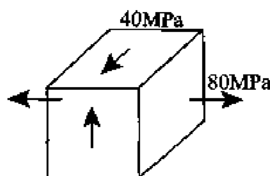


图 1-2

2. 图 1-2 所示单元体的最大正应力 σ_{max} = ________ 最大剪应力 τ_{max} = ________。

3. 变截面杆受两个集中力作用，如图 1-3 所示。设 AB 和 BC 段的横截面积为 A_1、A_2，且 $A_2 = 1.5\ A_1$，则 AB 段的应力与 BC 段的应力之比为________。

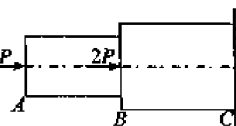


图 1-3

4. 某传动轴外径 D=80mm，内径 d=65mm，转速 n=50r/min，材料的许用剪应力[+τ]=45MPa，则此轴所能传递的最大功率为________ kW。

5. 简支梁全梁上受均布载荷作用，当跨长增加一倍时，最大剪应力增加一倍，最大弯矩增加了________倍。

6. 矩形截面梁，若截面高度和宽度都增加 1 倍，则其强度将提高到原来的________倍。

二、选择题，将答案代号填在答题纸上（每题 3 分，共 27 分）

1. 下列结论中正确的是：________

A. 材料力学主要研究各种材料的力学问题

B. 材料力学主要研究各种材料的力学性质

C. 材料力学主要研究杆件受力后变形与破坏的规律

D. 材料力学主要研究各类杆件中力与材料的关系

2. 图 2-1 所示悬臂梁给出了 1，2，3，4 点的应力状态单元体，其中错误的为图：________

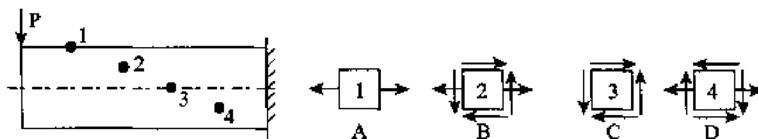


图 1-3

3. 对剪力与弯矩的关系，下列说法正确的是：________

A. 同一段梁上，剪力为正，弯矩也必为正

B. 同一段梁上，剪力为正，弯矩必为负

C. 同一段梁上，弯矩的正负不能由剪力唯一确定

D. 剪力为零处，弯矩也必为零

4. 材料相同的两根圆轴，一根为实心轴，直径为 D_1；另一根为空心轴，内径为 d_2，外径为 D_2，$d_2/D_2=\alpha$。若两轴横截面上的扭矩 Mn 和最大剪应力 τ_{max} 均相同，则两轴横截面积之比

A1/A2 为________。

A. $1-\alpha^2$　　B. $\frac{(1-\alpha^4)^{2/3}}{1-\alpha^2}$　　C. $(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)^{2/3}$　　D. $(1-\alpha^4)^{2/3}$

5. 一个圆轴用碳钢材料制作，在校核该轴的扭转刚度时，发现单位长度扭转角 θ 超过了许用值。为保证此轴的扭转刚度，以下方案中最有效的是________。

A. 改用合金钢　　B. 改用铸铁　　C. 减少轴的长度　　D. 增加轴的直径

6. 图 2-2 所示简支梁受集中力作用，其最大挠度 f 发生在________。

A. 集中力作用处

B. 跨中截面

C. 转角为零处

D. 转角最大处

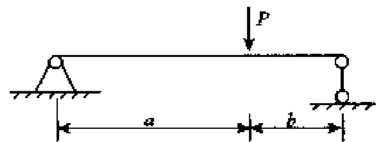


图 2-2

7. 当横向力作用面通过截面的弯曲中心时，________。

A. 梁的横截面上只有弯矩，无剪力。　　B. 梁只弯曲而无扭转。

C. 梁的横截面上只有正应力，无剪应力。　　D. 梁只发生平面弯曲变形。

8. 如图 2-3 所示的四种截面梁，材料和截面面积相等。从强度的观点考虑，图________所示的截面梁在铅直面内所能够承担的弯矩最大。

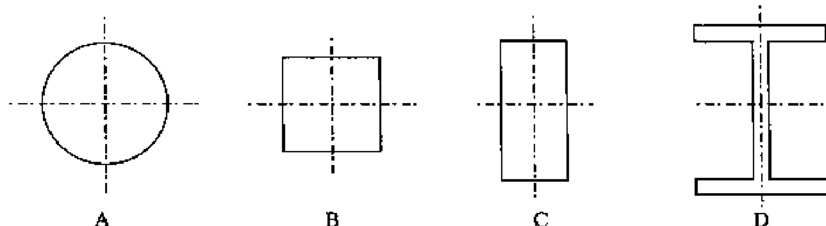


图 2-3

9. 对于等截面梁，以下结论错误的是________。

A. 最大正应力 $|\sigma|_{max}$ 必出现在弯矩值 $|M|$ 为最大的截面上。

B. 最大剪应力 $|\tau|_{max}$ 必出现在剪应力值 $|Q|$ 为最大的截面上。

C. 最大剪应力 $|\tau|_{max}$ 的方向必与剪力 $|Q|_{max}$ 的方向一致。

D. 最大拉应力与最大压应力在数值上必相等。

三、计算题：(共 105 分，答案写在答题纸上)

1. 作图 3-1 所示带中间铰的刚架的剪力图和弯矩图。(12 分)

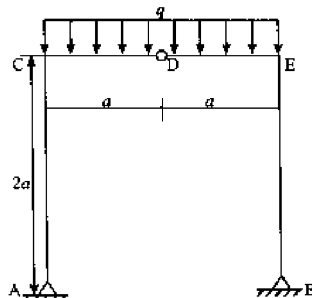


图 3-1

2. 图 3-2 所示杆件由两种材料在 $I-I$ 斜面上黏结而成。已知杆件横截面面积 $A=1000mm^2$，根据黏结剂要求，黏结面上拉应力不超过 $\sigma=16MPa$，剪应力不超过 $\tau=8MPa$。若要

求黏结面上正应力与剪应力同时达到各自的容许值，试计算黏结面的倾角，并确定最大容许轴向拉伸载荷 P。(15 分)

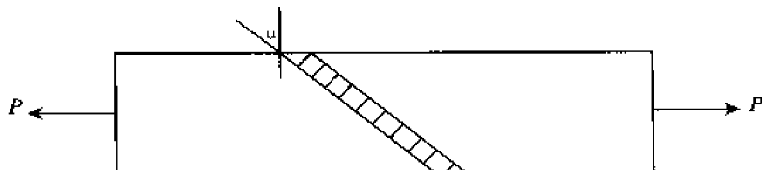


图 3-2

3. AB 为刚性梁。1,2 杆材料相同，横截面为 A，长度都是 l，2 号杆倾角为 a。求 1,2 杆内力。(18 分)

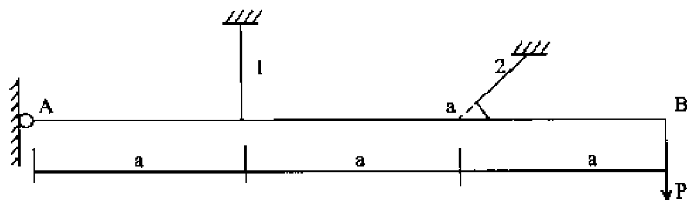


图 3-3

4. 如图 3-4 所示的构件，受均布力偶的作用，其力偶的集度为 m=20N·m/m 已知直径 $D=200\text{mm}$，$l=2\text{m}$，材料的 G=80GPa，$[\tau]=30\text{MPa}$，单位长度的需用扭角$[\phi]=0.04\text{rad/m}$。试进行强度和刚度校核，并计算 A、B 二截面的相对扭转角 ϕ_{BA}。(20 分)

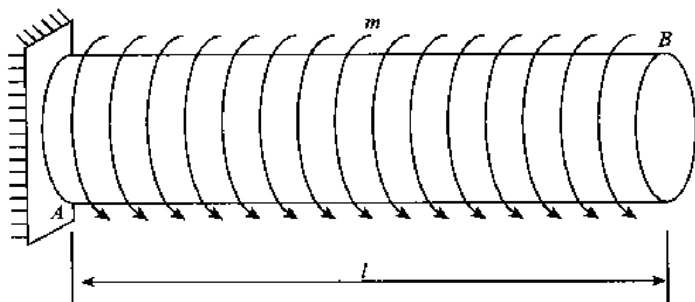


图 3-4

5. 一斜齿轮轴，其载荷及尺寸如图 3-5 所示。已知斜齿轮的轴向力 $F_x=650\text{N}$，径向力 $F_r=650\text{N}$，切向力 $F_1=1730\text{N}$，轴的许用应力$[\sigma]=90\text{MPa}$，试按第三强度理论设计轴的直径 d。(20 分)

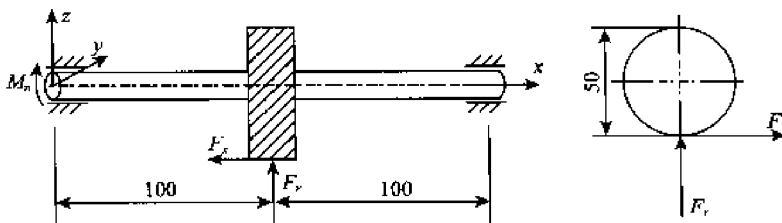


图 3-5

6. 两端封闭的薄壁铸铁圆筒如图 3-6 所示，已知圆筒内径 $d=100\text{mm}$，壁厚，$t=10\text{mm}$ 材料的 $\mu=0.25$，$[\sigma]=40\text{MPa}$，试按第二强度理论，校核下列三种情况下圆筒的强度。

(1)圆筒承受内压力 $q=5\text{MPa}$ (5 分)

(2)圆筒承受内压力 $q=5\text{MPa}$ 和轴向压力 $F=100\text{kN}$(7 分)

(3)圆筒承受内压力 $q=5\text{MPa}$ 和轴向压力 $F=100\text{kN}$ 以及外力偶矩 $T=3\text{kN}\cdot\text{m}$(8 分)

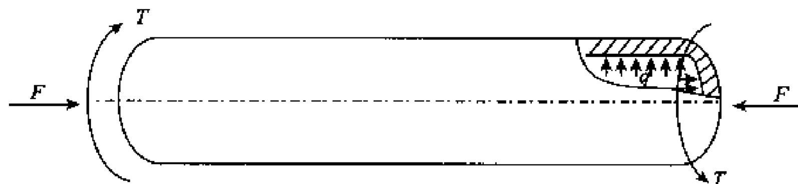


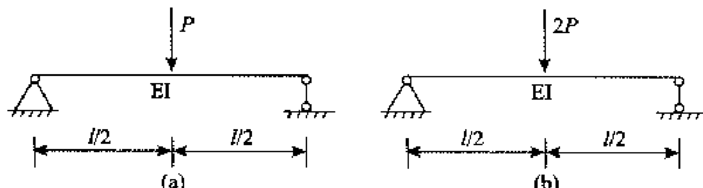
图 3-6

华南理工大学2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

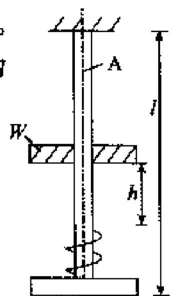
一、单项选择(共3小题,每题5分,共15分)

1. 图示(a)梁中的弹性应变能为U_1,图示(b)梁中的弹性应变能则是________。

A. $U_2=2U_1$;　　B. $U_2=4U_1$;　　C. $U_2\doteq 6U_1$;　　D. $U_2=8U_1$。



2. 图示钢杆上端固定,下端固联一个园盘,园盘上有一刚度系数为k的弹簧。钢杆横截面面积为A,长为l,材料的弹性模量为E。一重力为W的重物自高度为h处自由落下,则钢杆的动荷系数为 ______。



A. $1+\sqrt{1+\frac{2(hk+W)\mathrm{EA}}{Wlk}}$;　　B. $1+\sqrt{1+\frac{h\mathrm{EA}k}{2W(lk+\mathrm{EA})}}$;

C. $1+\sqrt{1+\frac{(hk+W)\mathrm{EA}}{2Wlk}}$;　　D. $1+\sqrt{1+\frac{2h\mathrm{EA}k}{W(lk+\mathrm{EA})}}$。

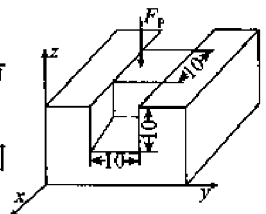
3. 两根长度相等、直径不等的圆轴承受相同的扭转外力偶矩作用后,轴表面上母线转过相同的角度。设直径大的轴和直径小的轴的横截面上的最大切应力分别为$\tau_{1\max}$和$\tau_{2\max}$,材料的切变模量分别为G_1和G_2。关于$\tau_{1\max}$和$\tau_{2\max}$的大小,有下列四种结论,请判断哪一种是正确的________。

A. $\tau_{1\max}>\tau_{2\max}$;　　B. $\tau_{1\max}<\tau_{2\max}$;

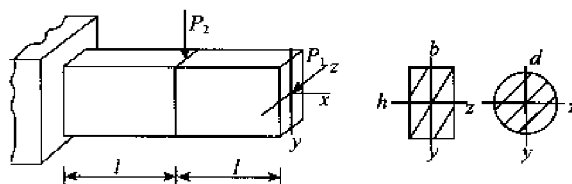
C. 若$G_1>G_2$,则有$\tau_{1\max}>\tau_{2\max}$;　　D. 若$G_1>G_2$,则有$\tau_{1\max}<\tau_{2\max}$。

二、填空(共2小题,共20分)

1. 正方形钢块放置在刚性槽内,钢块顶面承受向下的荷载F_P,钢块沿x、y、z方向的线应变和正应力的表达式分别为__________;__________。

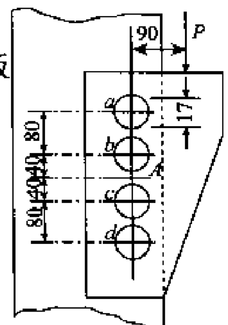


2. 图示悬臂梁受P_1、P_2作用,截面分别选用矩形$b\times h$和直径为d的圆形,则这两种截面梁的最大正应力分别为__________和__________。

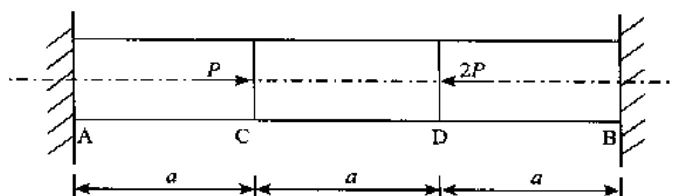


三、计算题(共6题,共115分)

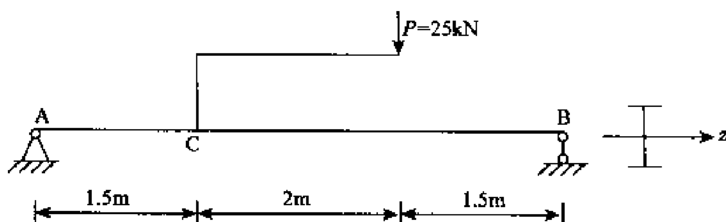
1. 图示节点板用四个直径为$d=17$mm的铆钉固定在立柱上,已知节点板承受荷载P=20kN,试求各铆钉内的剪应力。(15分)



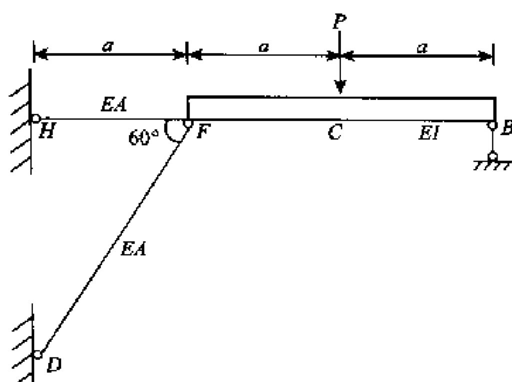
2. 作图示杆件的轴力图。(15分)



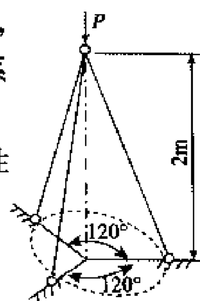
3. 结构受力如图所示，已知横梁 AB 部分由 25 号工字钢制成，$W_z=402\times10^3\text{mm}^3$，材料的许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试画出弯矩图，并校核横梁 AB 的正应力强度。(15 分)



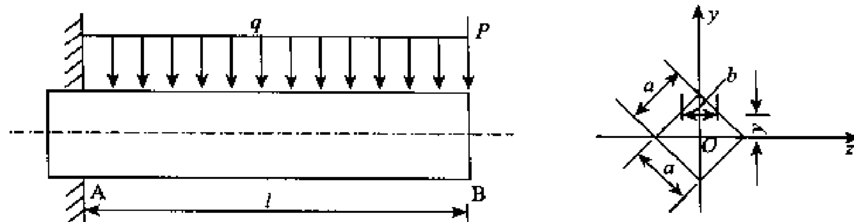
4. 由杆件及梁组成的混合结构如图所示，设集中力 P、杆件的抗拉(压)刚度 EA、梁的抗弯刚度 EI、长度 a 均为已知，试求梁中点 C 的垂直位移。(20 分)



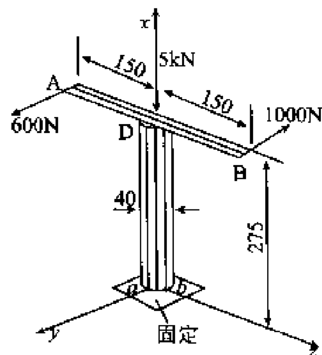
5. 由三根在顶端铰接的钢管构成的支架如图所示。钢管的外径 $D=30\text{mm}$，内径 $d=22\text{mm}$，长度 $l=2.5\text{m}$，材料的弹性模量 E=210GPa。若取稳定安全系数 $n_{st}=3$，试求许可荷载[P]。(15 分)



6. 悬臂梁 AB 受均布荷载 q 和集中力 P 如图示，横截面为正方形 $a\times a$，中性轴即正方形对角线。试计算最大剪应力的大小及其所在位置。(20 分)



7. 直杆 AB 与直径 $d=40\text{mm}$ 的圆柱焊成一体，结构受力如图所示，若不忽略弯曲剪力的影响，试确定固定端上点 a 和点 b 的应力状态，并按第四强度理论计算其相当应力 σ_{r4}。(15 分)



北京航空天大学2007年硕士研究生入学考试试题

一、选择题(本题共24分,每小题各6分)

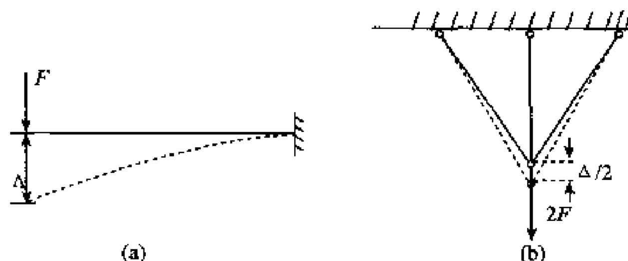
1. 构件在卸去外载后所消失的变形和所残留的变形________。

A. 分别称为弹性变形和塑性变形　　B. 分别称为塑性变形和弹性变形

C. 统称为弹性变形　　D. 统称为塑性变形

2. 在线弹性范围内,图a所示悬臂梁在力F作用点的挠度为Δ,图b所示桁架在力$2F$作用点铅垂位移为$\Delta/2$。设梁的应变能为V_ε^a,桁架各杆应变能之和为V_ε^b,则________。

A. $V_\varepsilon^a=V_\varepsilon^b$　　B. $V_\varepsilon^a<V_\varepsilon^b$　　C. $V_\varepsilon^a>V_\varepsilon^b$　　D. 缺少条件,不能判断



题一2图

3. 当交变应力的______不超过材料的持久极限时,试件可以经历无限循环而不发生疲劳破坏。

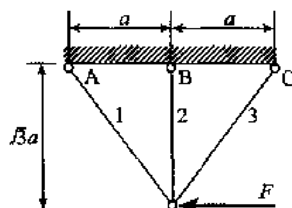
A. 应力幅　　B. 平均应力　　C. 最小应力　　D. 最大应力

4. 实心轴横截面面积为A_1,空心轴横截面面积为A_2,内外径比α.若两轴在横截面上的扭矩和最大切应力均相等,则两轴的横截面积比A_1/A_2是________。

A. $1-\alpha^2$　　B. $(1-\alpha^4)^{2/3}$　　C. $(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)^{2/3}$　　D. $(1-\alpha^4)^{2/3}(1-\alpha^2)$

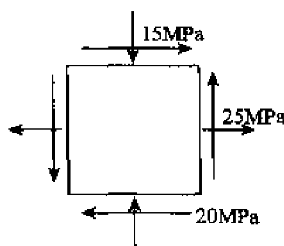
二、填空题(本题共16分,每小题各8分)

1. 图示桁架结构静不定度为________度,若三杆拉压刚度均为EA,在图示水平载荷F作用下各杆轴力分别为$F_{N1}=$________、$F_{N2}=$________、$F_{N3}=$________。



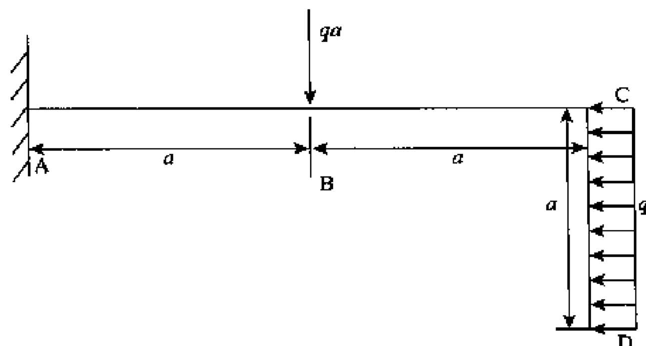
图二1图

2. 图示平面应力单元体的三个主应力$\sigma_1=$________,$\sigma_2=$________,$\sigma_3=$________,最大切应力τ_{max}________。



图二2图

三、(本题 15 分)试画图示结构轴力、剪力和弯矩图

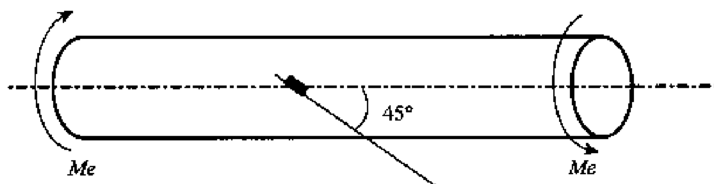


图三图

四、(本题 15 分)

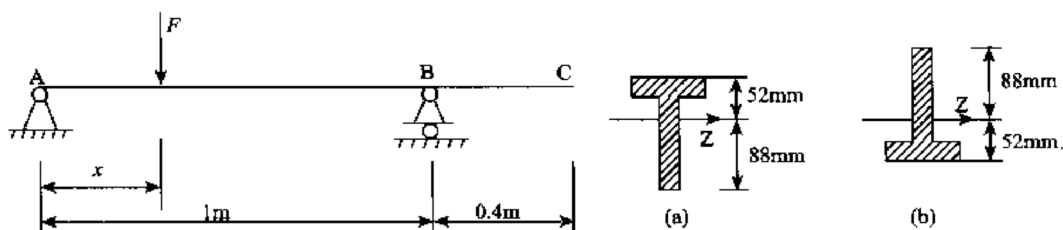
受扭转力偶 Me 作用的圆截面轴,长 $l=1\text{m}$,直径 $d=20\text{mm}$,材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,测得圆轴表面 45°方向的正应变 $\varepsilon_{45^\circ}=400\times10^{-6}$。试求(1)外表面任意点处的最大切应变;(2)此轴横截面上的最大切应力、外力偶矩 Me 的大小和两端截面的相对扭转角。

(3)若已知材料许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$,试用第三强度理论校核强度。



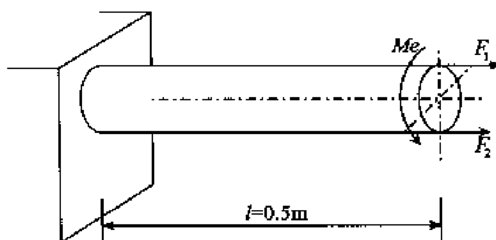
图四图

五、(本题 15 分)图示铸铁梁 AC 许用拉应力$[\sigma_t]=30\text{MPa}$,许用压应力$[\sigma_c]=60\text{MPa}$,z 轴为中性轴,$I_z=7.63\times10^6\text{mm}^4$,载荷 F 可沿梁任意移动,试求(1)在如图(a)、(b)所示横截面两种摆放情况下哪种许用载荷$[F]$较大;(2)任选一种摆放情况计算许用载荷。



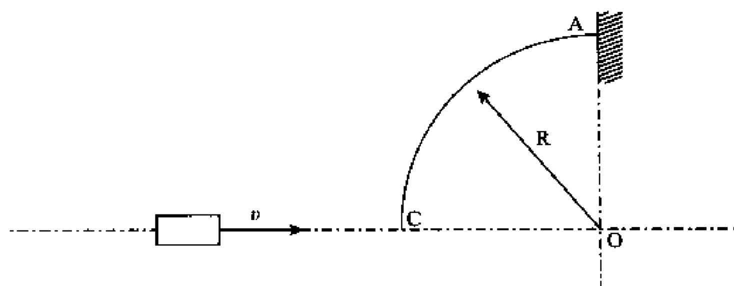
图五图

六、(本题 15 分)圆钢杆受力如图,已知直径 $d=20\text{mm}$,力 $F_1=6\text{kN}$,$F_2=3\text{kN}$,材料许用应力$[\sigma]=120\text{MPa}$,用第四强度理论确定扭力矩 Me 的许用值。



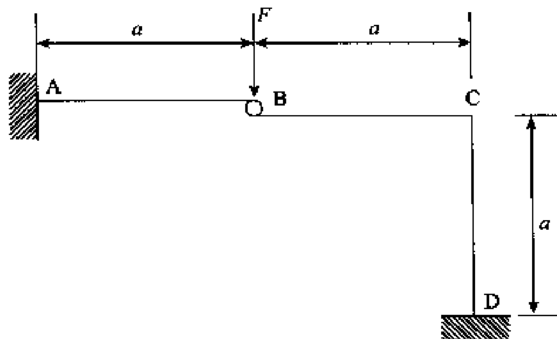
图六图

七、(本题 15 分)一重量为 Q 的物体以速度 v 沿水平方向冲击四分之一等截面小曲率圆杆杆端 C,曲杆的弯曲刚度为 EI,曲杆质量不计,略去轴力及剪力的影响。试求冲击点 C 处的最大水平位移。



图七图

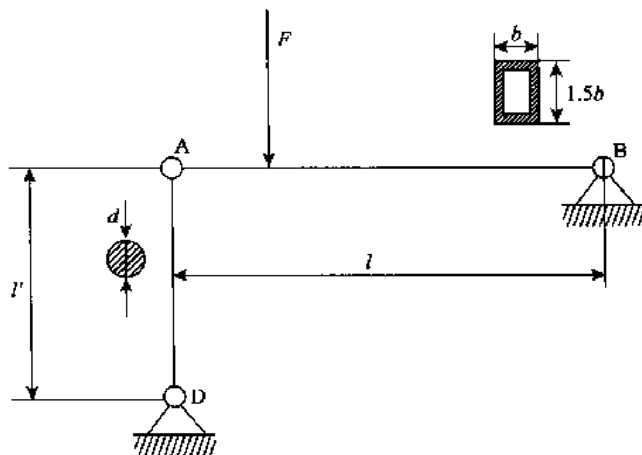
八、(本题 15 分)图示悬臂梁 AB 自由端通过活动铰链搁在刚架 BCD 自由端,梁与刚架各段均长 a,弯曲刚度 EI,B 点作用向下的力 F,试求 B 点的铅垂位移。



图八图

九、(本题 20 分)盒形梁 AB 的许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$,长 $l=2\text{m}$,盒形截面尺寸如图所示,壁厚 $t=b/10$。柱 AD 为圆形截面,直径 $d=36\text{mm}$,长 $l'=0.8\text{m}$,

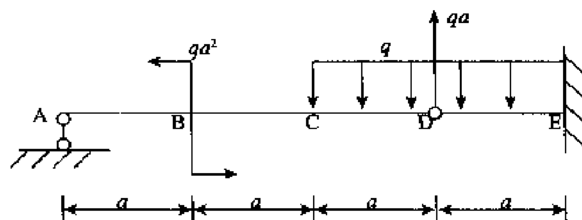
$\lambda_p=99.3$,$\lambda_0=57$,中柔度杆临界应力经验公式 $\sigma_{cr}=304-1.12\lambda$,稳定安全因数 $n_{st}=3$,力 F 在 AB 梁上移动,(1)假设梁的强度足够,求结构许用载荷$[F]$;(2)设计梁 AB 的尺寸 b。



图九图

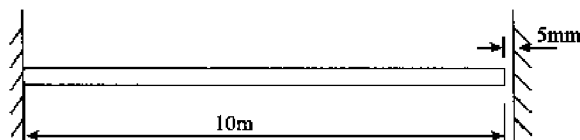
北京理工大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

一、(25 分)结构受力如图所示,试画出剪力图和弯矩图。



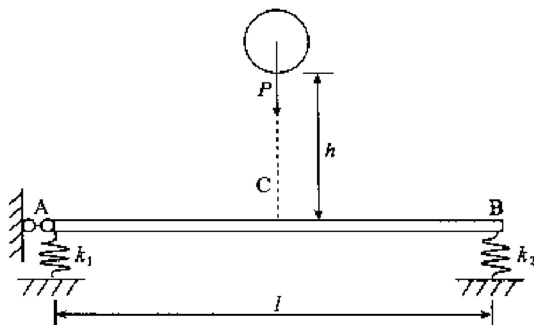
题一图

二、(20 分)等截面钢直杆长 $l=10\text{m}$,一端面定,一端自由,材料弹性模量 E=210GPa,线膨胀系数 $\alpha=12.5\times10^{-6}/℃$,为保证构件的正常工作,自由端在环境温度为 0℃时预留 5mm 的伸缩缝,若要求杆内最大轴向应力的绝对值不超过 50MPa,则允许的环境温度变化为多少摄氏度?



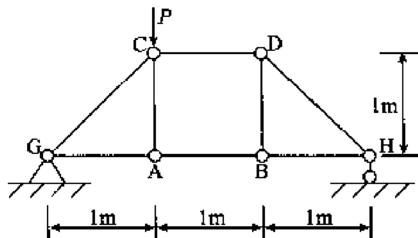
题二图

三、(20 分)如图所示,梁 AB 的抗弯度刚为 EI,跨度为 l,A、B 两端沿垂直方向分别用刚度系数 $k_1=\frac{12\text{EI}}{7l^3}$,$k_2=\frac{3\text{EI}}{l^3}$的弹簧支承,一重量为 P 的重物自高度 $h=\frac{Pl^3}{\text{EI}}$处无初速自由下落冲击梁的中点 C,试求系统的动荷因数 K_d



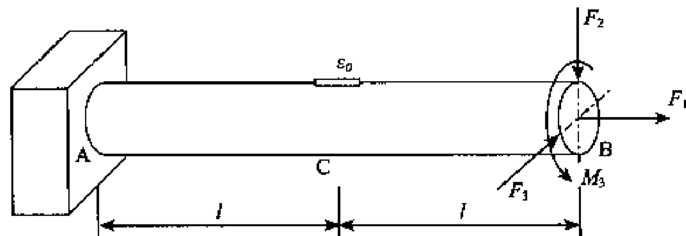
题三图

四、(10 分)桁架尺寸如图所示,已知节点 C 受铅垂向下的力 $P=1\text{kN}$ 作用时,杆 AD 产生逆时针方向的转角 $\theta=0.01\text{rad}$。试确定为使节点 C 产生铅垂向下的线位移 $\Delta_c=0.001\text{m}$,在节点 A 和 D 两处应加多大的力 F,并说明加力的方向。



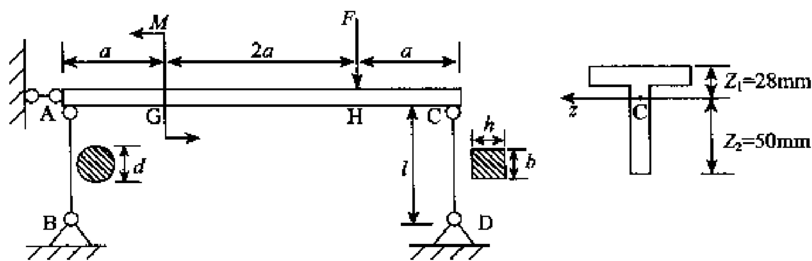
题四图

五、(25 分)长为 $2l$ 的圆截面杆 AB,直径为 d,且 $l=5d$,杆 AB 受力如图所示,$F_1=5F$,$F_2=3F$,$F_3=4F$,$M_t=4Fl$,F_1、F_2、F_3 的方向分别沿杆的轴线、铅垂和水平方向,测得 C 截面最上缘沿轴线方向的线应变为 ε_0,材料的弹性模量为 E,试求:(1)F 的大小。(2)危险截面上危险点处第三强度理论的相当应力 σ_{r3}(不计弯曲剪应力)。



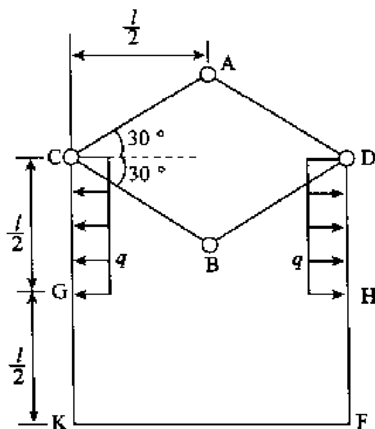
题五图

六、(25 分)由横梁 AC 及撑杆 AB 和 CD 构成的结构受力如图,已知:$M=48\text{kN}\cdot\text{m}$,$F=48\text{kN}$,$a=500\text{mm}$,$l=600\text{m}$;其中梁 AC 是 T 形截面铸铁梁,横截面尺寸如图,且 $I_z=3.0\times10^7\text{mm}^4$,梁的材料的许用应力分别为$[\sigma_+]=35\text{MPa}$,$[\sigma_-]=55\text{MPa}$;两根撑杆 AB 和 CD 的两端均为球铰,撑杆材料的 $\lambda_p=100$,$\lambda_s=60$,$E=200\text{GPa}$,稳定的临界应力经验公式为 $\sigma_{cr}=(308-1.10\lambda)\text{MPa}$,稳定安全因数取为 $n_{st}=5$;AB 杆横截面为圆形:d=32mm,CD 杆横截面为矩形:$b=10\sqrt{3}\text{mm}$,$h=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}\text{mm}$;试校核该结构安全性(不计弯曲剪应力)。



题六图

七、(25 分)图示结构,K 及 F 为刚结点,刚架的弯曲刚度 EI、桁架的拉压刚度 EA 及几何尺寸 l 均为已知,现在 CG 段和 DH 段施加均布载荷 q,使得点 A 和点 B 的相对位移为$\dfrac{\sqrt{3}l}{192}$,试用图乘法求载荷集度 q 的值。



题七图

中国科学院研究生院2007年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

一、判断下面的说法是否正确，如果不正确，予以更正(概念题，每小题5分)

1. 虚位移原理的应用不受小变形的限制，只与材料的应力一应变关系有关；(　　)

2. 在进行压杆稳定性分析时，根据压杆的横截面积大小将压杆分为细长杆、中长杆和粗短杆；(　　)

3. 某杆件横截面上同时有轴力、弯矩和扭矩作用时三种内力分量引起的变形是相互关联的，总应变能不等于三者单独作用时的应变能之和。(　　)

二、填空题(每小题5分)

1. 细长杆受轴向压力作用，其临界载荷与________、________和________有关，临界载荷的表达式为________。

2. 圆轴扭转的单位扭转角大小与其________成反比，与其上作用的________成正比。

三、选择题(每小题5分)

1. 各向同性假设认为，材料内部各点________是相同的。

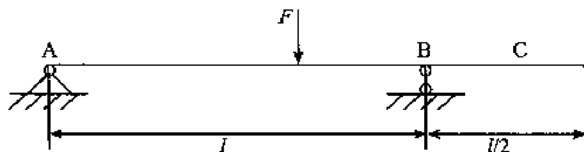
A. 力学性质　　B. 几何特性　　C. 内力　　D. 位移

2. 轴向拉压杆，在与其轴线平行的纵向截面上________。

A. 正应力为零，切应力不为零　　B. 正应力不为零，切应力为零

C. 正应力和切应力均不为零　　D. 正应力和切应为均为零

3. 图示产生弯曲的梁上，BC梁段________。



A. 有变形无位移　　B. 有位移无变形

C. 即有变形又有位移　　D. 即无变形又无位移

4. 剪应力互等定理的适用条件是________。

A. 仅仅为纯剪切应力状态　　B. 平衡应力状态

C. 仅仅为线弹性范围　　D. 仅仅为各向同性材料

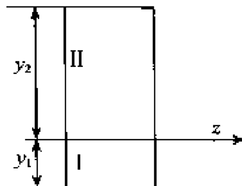
5. 矩形截面梁上只有正弯矩作用，假设材料的拉伸弹性模量与压缩弹性模量的比值为3∶2，那么确定中性轴z位置的原则是受拉区I与受压区II ________。

A. 对z轴的惯性矩之比为$I_{z1}:I_{z2}$

B. 面积之比$A_1:A_2=2:3$

C. 对z轴的静矩的绝对值之比为$S_{z1}:S_{z2}=2:3$

D. 高度之比为$y_1:y_2=2:3$



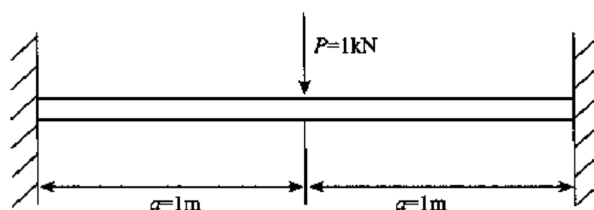
四、简答题(每小题 5 分)

1. 简述功互等定理。

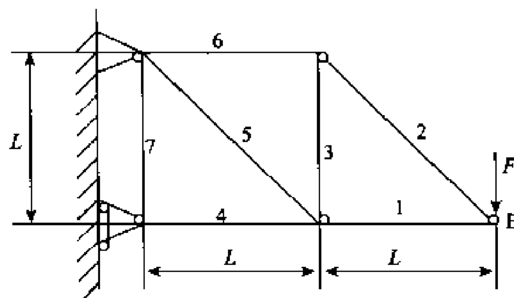
2. 梁发生弯曲变形时,梁的平面假设是什么?

五、计算题(每小题 15 分)

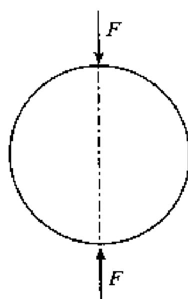
1. 求如图所示梁的支座反力,画出梁的剪力图和弯矩图。



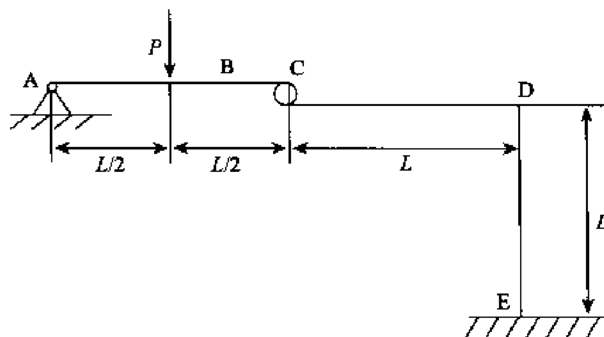
2. 如下图所示一平面珩架在 B 点受到一垂直力 F 的作用。构成珩架的每个杆的弹性模量都是 E,截面积都是 A,试用能量法求出点 B 的垂直方向的位移。



3. 如图所示,轴承中的滚珠直径是 D,弹性模量为 E,泊松比是 μ,受一对径向集中力 F 的作用,求其体积的改变量。

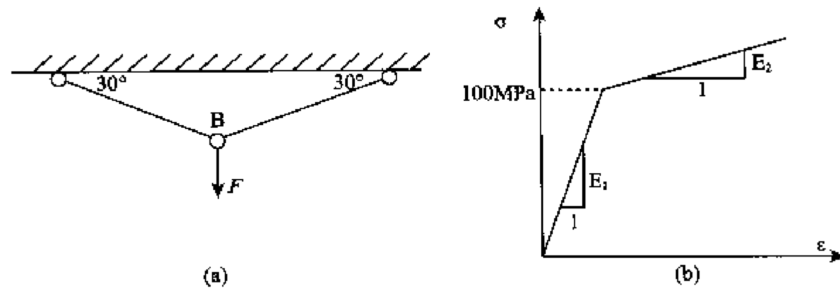


4. 图示结构各构件 EI 相同,载荷 P 作用于 B 点。求 B 截面的垂直位移。



5. 画出单轴拉伸时点的应力状态图，纯剪时点的应力状态图，并在相应的应力圆上表示出该点的应力状态。

6. 如下图(a)所示的简单杆系中，两杆的长度为 3m，横截面积 $A=10cm^2$，材料的应力一应变关系如图(b)所示，$E_1=70GPa$，$E_2=10GPa$。试分别计算当 $F=80kN$ 和 $F=120kN$ 时，结点 B 的位移。



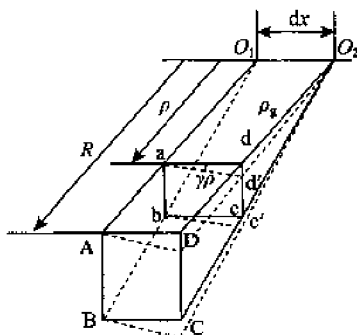
部分院校考研入学试题答案

西安交通大学2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题解析

一、简答题

1. 解答:疲劳破坏是一个疲劳裂纹萌生、逐渐扩展和最后断裂的过程,断口上通常出现两个区域,一个是光滑区域,一个是粗粒状区域。

2. 解答:如图所示,先取一圆片,再过轴线截二刀,得一楔形体。如图,此楔形体变形可用角度 P_p 和 $d\varphi$ 表示。纵向线偏转角 γ,两截面相对转角 $d\varphi$。

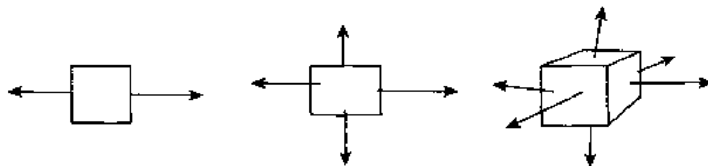


题一 2 答图

根据弧长=半径×圆心角得:$dd' = \gamma_\rho dx = \rho d\varphi$,即:$\gamma_\rho = \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$

3. 解答:最大切应力:$\tau_{\max} = \dfrac{2F}{\pi d^2}$;最大挤压力:$\sigma_{\max} = \dfrac{F}{2td}$

4. 解答:主应力中有一个不为零时为单应力状态;两个不为零时为二向应力状态;有三个不为零时为三向应力状态。各种状态图如图所示。



题一 4 答图

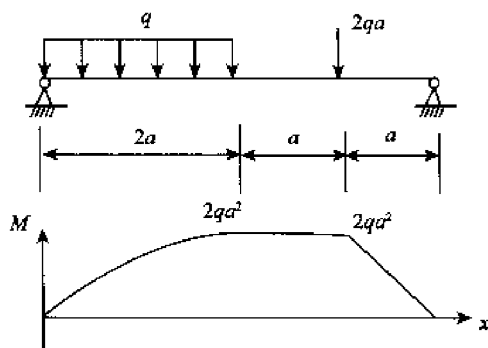
5. 解答:对于空心截面,用较小的横截面积就能获得较大的抗弯刚度,而且节省材料。

二、单项选择题

6. A(延伸率是材料的特性) 7. A 8. C(经计算即可求出) 9. B 10. D(h 和 l 的大小不定)

三、计算题

11. 载荷与弯矩图如题三 11 答图所示。



题三 11 答图

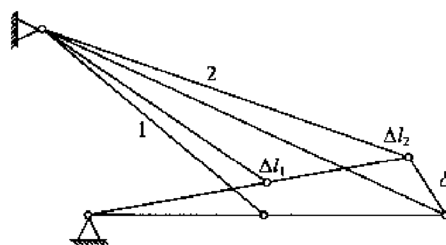
12. 答案：

先将结构从 B 点分开，因为梁视为刚性，所以 1 杆和 2 杆的变形是成比例的。所以，只要测出任意一根悬索的变形就能求出 F 大小。

由于结构是对称的，可得：

$\Delta l_1 = \Delta l_4, \Delta l_2 = \Delta l_3$

如图所示



$$\Delta l_2 = \delta \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{\delta}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta l_1 = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta l_2 = \frac{\varphi}{\sqrt{10}} \Delta l_1$$

所以：$\Delta l_3 = \dfrac{4}{\sqrt{10}} \Delta l_4, \Delta l_2 = \dfrac{4}{\sqrt{10}} \Delta l_1$

$$F_4 = \text{EA} \frac{\Delta l_4}{l_4}, F_3 = \text{EA} \frac{\sqrt{10} \Delta l_4}{l_3}$$

分析 BC 段：

$$\frac{\sqrt{2}}{2} F_4 a + \frac{\sqrt{5}}{5} F_3 \cdot 2a = F_B \cdot 2a \Rightarrow F_B = \frac{\sqrt{2}}{4} F_4 + \frac{\sqrt{5}}{5} F_3$$

再来分析 AB 段：

$$\frac{\sqrt{2}}{2} F_1 a + \frac{\sqrt{5}}{5} F_2 \cdot 2a + F'_B \cdot 2a = Fx \Rightarrow F = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} F_1 a + \frac{\sqrt{5}}{5} F_2 \cdot 2a + F'_B \cdot 2a}{x}$$

$F_1 = F_4 \quad F_2 = F_3 \quad F_B = F'_B$

将已知条件代入得：

$$F = \frac{5 + 4\sqrt{10}}{5} (\text{EA} \Delta l_4), F = \frac{\sqrt{5} + 4}{5} (\text{EA} \Delta l_3)$$

$$F = \frac{5 + 4\sqrt{10}}{5} (\text{EA} \Delta l_2), F = \frac{\sqrt{5} + 4}{5} (\text{EA} \Delta l_1)$$

13. 答案：

(1) F 向外拉时，3 杆受压，由平衡条件可得：

$F_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}F$

$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = 0.01\text{m}$, $\lambda = \frac{\mu l}{i} = 100$

$\therefore \lambda_s \leqslant \lambda \leqslant \lambda_p$ 杆 3 为中柔度杆

$F_{cr} = (a - b\lambda)A = 254968\text{N}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}F \leqslant \frac{F_{cr}}{3} = 84989\text{N} \Rightarrow F \leqslant 147201\text{N}$

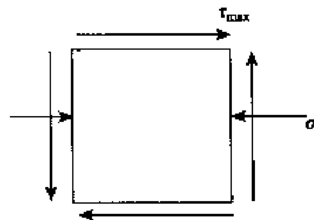
(2)F 向里压时,1、2、3、4 杆受压,各杆压力情况一样,由平衡条件可得: $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}F$

由于各杆参数一样,且 $F_3 = F_1$,所以许可载荷 F 不改变。

14. 答案:

(1) $\tau_{max} = \frac{T}{W_P}, W_P = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$

轴外表面任意点应力状态如图所示



由第三强度理论得: $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max} \leqslant [\sigma]$

$\therefore \frac{2T}{W_p} \leqslant [\sigma] \Rightarrow T \leqslant [\sigma] \cdot \frac{W_P}{2} = 1.99 \times 10^4 \text{N} \cdot \text{m}$

(2) $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F}{EA}, \varepsilon_y = \frac{\mu F}{EA} \quad \sigma_x = \frac{F}{A}$

$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y - \mu\varepsilon_x)$, $\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

$\therefore \varepsilon_x = 1.33 \times 10^{-4}, \tau_{max} = 4.52 \times 10^6 \text{Pa}$

15. 答案:

$\Delta_{st} = \frac{QL}{EA}, \Delta_d = \Delta_{st}(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}})$

$\therefore F_d = k\Delta_{st}(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}}) = Q(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}})$

$F = F_d + Q$

$\therefore \sigma_d = \frac{F_d + Q}{A} = \frac{Q(2 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}})}{A}$

16. 答案:取整体分析:

$\sum F_X = 0, \Rightarrow F_{AX} + F_{DX} + \frac{q_0 l}{2} - P = 0$

$\sum F_Y=0,\Rightarrow F_{AY}+F_{DY}=0$

$\sum M_A=0,\Rightarrow \frac{Pl}{2}+\frac{l}{2}\cdot F_{DY}+M-\frac{q_0 l}{2}\cdot\frac{l}{3}=0$

取 AB 杆分析：$\sum M_B=0,\Rightarrow F_{AX}\cdot l+\frac{q_0 l}{2}\cdot\frac{2}{3}l=0$

取 CD 杆分析：$\sum M_C=0,\Rightarrow P\cdot\frac{l}{2}-F_{DX}\cdot l=0$

通过五个方程联立即可求出 P 及其 A、D 处约束反力。

北京航空航天大学 2006 年研究生入学考试试题解析

一、选择题

1. D　2. AB,D,C　3. D

二、填空题

1. 2,1　2. $-\frac{1}{2}$，$0.75\sigma_0$　3. CD,BC

三、解答题

CB 段轴向应力为：$\sigma_{cu}=E_{cu}\varepsilon_{cu}=100\times10^3\times1.0\times10^{-3}=100\text{MPa}=[\sigma_{cu}]$

轴向载荷为：$F=F_N=\sigma_{cu}A=100\times\frac{\pi\times40^2}{4}=125.66\text{kN}$

DC 段轴向正应力为：$\sigma_{st}=\frac{F_N}{2A}=\frac{125.66\times10^3}{\frac{\pi\times80^2}{4}}=25\text{MPa}<[\sigma_{st}]$

所以安全。

DC 段轴向正应变为：$\varepsilon_{st}=\frac{\sigma_{st}}{E_{st}}=\frac{25}{210\times10^3}=1.19\times10^{-4}$

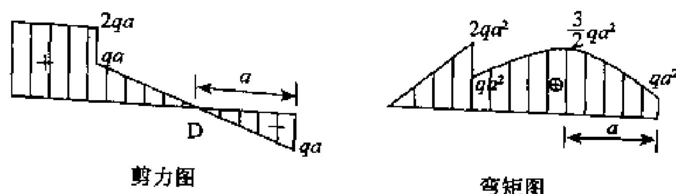
四、解答

$\tau_{max}=\frac{T_{max}}{W_P}=\frac{5\times10^6}{\frac{\pi d^3}{16}}=25.4\text{MPa}$

$\varphi=\frac{Tl}{GI_P}=\frac{T_1 l}{GI_P}+\frac{T_2 l}{GI_P}=\frac{(-3+5)\times10^{-6}\times500}{82\times10^{-3}\times\frac{\pi d^4}{32}}=0.00124\ (\downarrow)$

$\frac{T_1}{GI_{P1}}=\frac{T_2}{GI_{P2}}$，$\frac{T_1}{T_2}=\frac{GI_{P1}}{GI_{P2}}=\frac{d^4}{d^4(1-d_1^4/d^4)}$，$d_1=79.5\text{mm}$

五、解答



剪力图　　　　弯矩图

六、解答

(1)当 F 在 AB 之间移动时，在 AB 中点处有：$M_{max}=\frac{1}{4}Fl$

此时：$\sigma_{max}^{+}=\dfrac{140\times\frac{1}{4}Fl}{I_z}=\dfrac{35Fl}{I_z}$，$\sigma_{max}^{-}=\dfrac{60\times\frac{1}{4}Fl}{I_z}=\dfrac{15Fl}{I_z}$

(2)当 F 在 BC 之间移动到 C 点时，B 处有：$M_{max}=\dfrac{1}{2}Fl$

此时：$\sigma_{max}^{+}=\dfrac{60\cdot\frac{1}{2}Fl}{I_z}=\dfrac{30Fl}{I_z}$，$\sigma_{max}^{-}=\dfrac{140\cdot\frac{1}{2}Fl}{I_z}=\dfrac{70Fl}{I_z}$

综上，AB 梁的 $\sigma_{max}^{+}=\dfrac{35Fl}{I_z}$，$\sigma_{max}=\dfrac{70Fl}{I_z}$

应当满足：$\sigma_{max}^{+}=\dfrac{35Fl}{I_z}\leqslant[\sigma_{+}]$，即 $F\leqslant\dfrac{[\sigma_{+}]\cdot I_z}{35l}=17.14\text{kN}$

$\sigma_{max}^{-}=\dfrac{70Fl}{I_z}\leqslant[\sigma_{-}]$，即 $F\leqslant\dfrac{[\sigma_{-}]\cdot I_z}{70l}=17.14\text{kN}$

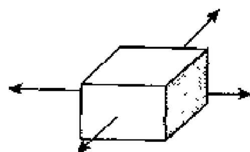
对于 BD 杆：$\lambda=\dfrac{1000}{\frac{25}{4}}=160>\lambda_P$，$P_{cr}=\dfrac{\pi^2\times200000\times\frac{\pi\times30^4}{64}}{1000^2}=37.8\text{kN}$

易见 F 在 C 处时 BD 杆受压力最大

$\dfrac{3F}{2}\leqslant\dfrac{P_{cr}}{2.5}$，$F\leqslant10.1\text{kN}$，所以 $[F]=10.1\text{kN}$

七、解答

(1)如图所示



(2) $\varepsilon_0=\dfrac{1}{E}(\sigma_x+\sigma_M-\mu\sigma_t)$，$\varepsilon_{90}=\dfrac{1}{E}(\sigma_t-\mu\sigma_x)$

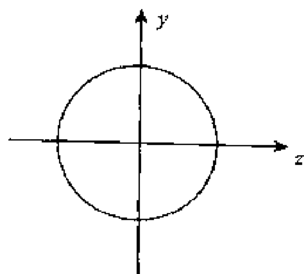
$\sigma_M=\dfrac{M}{W}$，$\sigma_x=\dfrac{pD}{4\delta}$，$\sigma_t=\dfrac{pD}{2\delta}$

解得：$P=3\text{MPa}\quad M=3.29\times10^5\text{N}\cdot\text{mm}$

(3) $\sigma_x=\dfrac{PD}{4\delta}+\dfrac{M}{W}=91.25\text{MPa}=\sigma_1\quad\sigma_t=\dfrac{pD}{2\delta}=45\text{MPa}=\sigma_2\quad\sigma_3=0$

$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=91.25\text{MPa}<[\sigma]$

八、解答

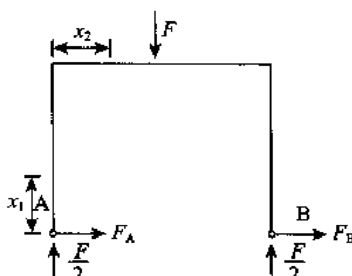


$$\Delta_{st} = \frac{Qa^3}{3EI}$$

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 = \frac{1}{2}F_d\Delta_d = \frac{1}{2}F_d\frac{F_d a^3}{3EI}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{F_d a}{W_z} = \frac{v}{W_z}\sqrt{\frac{3EIQ}{ga}}$$

如图所示，由静力关系可得



九、解答

$$M(x_1) = F_A x_1 \quad M(x_2) = F_A a - Fx_2/2$$

$$\overline{M}(x_1) = x_1 \quad \overline{M}(x_2) = a$$

$$\Delta_A = \frac{2}{EI}\left[\int_0^a M(x_1)\overline{M}(x_1)dx_1 + \int_0^a M(x_2)\overline{M}(x_2)dx_2\right] = 0$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{3F}{16}$$

$$\therefore M(x_1) = \frac{3F}{16}x_1 \quad M(x_2) = \frac{3F}{16}a - Fx_2/2$$

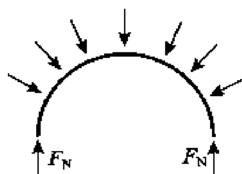
$$f_C = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F} = \frac{2}{EI}\left[\int_0^a M(x_1)\frac{\partial M(x_1)}{\partial F}dx_1 + \int_0^a M(x_2)\frac{\partial M(x_2)}{\partial F}dx_2\right] = \frac{7Fa^3}{96EI}$$

十、解答

沿圆环中心线加集度为 q 的均布载荷，在 q 的作用下：

如图所示

$$2F_N = \int_0^\pi q \cdot \frac{D}{2}d\theta\sin\theta$$



$$\Delta S = \frac{F_N\pi D}{Etb} = \frac{q\pi D^2}{2Ebt}$$

$$\Delta D = \frac{F_N\pi D}{\pi Etb} = \frac{qD^2}{2Ebt}$$

根据功的互等定理：$F \cdot \Delta D = q \cdot \Delta A \qquad \Delta A = \frac{FD^2}{2Ebt}$

北京理工大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题解析

一、答案

(1)由 D 点平衡关系可得：$F_{CD}=\sqrt{3}F_{GD}=\sqrt{3}F_{DH}$

由叠加法可知：

$$\omega_C=\omega_{Cq}+\omega_F\ ,\ \omega_{Cq}=-\frac{5qa^4}{24EI},\omega_{CF}=\frac{F_{CD}a^3}{6EI}$$

又有：$\Delta_{CD}=\dfrac{F_{CD}l}{EA}$，

$$\Delta_{DGV}=\frac{F_{DG}a}{EA\cos 30^\circ}=\frac{2F_{CD}a}{3EA}$$

$$\Delta_{DV}=\Delta_{DGV}+\frac{1}{2}(\Delta_{GV}+\Delta_{HV})$$

V 表示垂直方向

则 $W_C=\Delta_{CD}+\Delta_{DV}$

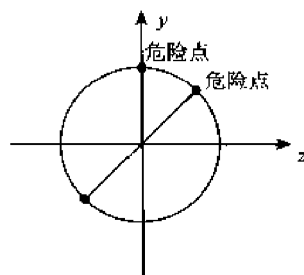
可得 $F_{CD}=\dfrac{35qa}{4}$

(2)对杆 GK 用叠加原理

$$\omega_H=\frac{Fa^2(a-6a)}{6EI}+\frac{Fa^2(a-3a)}{6EI}=-\frac{245qa^4}{24EI}$$

二、答案

AD 段有扭转，y 向弯曲和向纸面外的弯曲；DB 段和向纸外的弯曲只有扭转；BC 段只有扭转。内力图如图；危险截面在 A 截面。危险点位置如图所示。



题二答图

A 截面处有最大弯矩 $M=Fl$，AB 上的扭矩为：$T=\dfrac{1}{2}M_t=\dfrac{\sqrt{3}}{4}Fl$

先求出支反力，对于弯扭组合的情况：$\sigma_{r3}=\dfrac{\sqrt{M_z^2+M_y^2+T^2}}{W}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}Fl}{W}=\dfrac{16\sqrt{7}Fl}{\pi d^3}$

三、答案

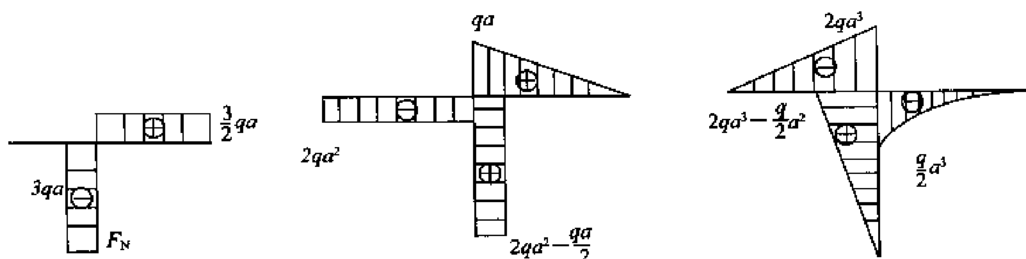
先求出支反力，由平衡条件

$F_A=F_{BX}$

$F_{BY}=qa+2qa^2$

$F_A \cdot a + qa \cdot \frac{a}{2} = 2qa^3 \Rightarrow F_A = F_{BX} = 2qa^2 - \frac{qa}{2}$

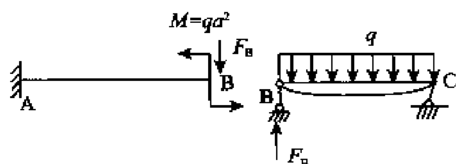
内力图如题三答图所示。



题三答图

四、答案

将中间铰解开，受力如图所示。



考虑 BC 段可得：$F = \frac{qa}{2}$

则对于 AB 杆：

$\omega_B = \omega_{BM} + \omega_{BF} = \frac{4qa^4}{2EI_1} - \frac{4qa^4}{3EI_1} = \frac{2qa^4}{3EI_1}$

$\theta_{B1} = \theta_{B1M} + \theta_{B1F} = \frac{2qa^3}{EI_1} - \frac{qa^3}{EI_1} = \frac{qa^3}{EI_1}$

对于 BC 杆可考虑为两端铰支的情况，如图所示。

$\theta_{B2} = -\frac{qa^3}{6EI_1}, \theta_{B3} = -\frac{\omega_B}{a} = -\frac{2qa^3}{3EI_1}$

$\therefore \theta = \theta_{B1} - \theta_{B2} + \theta_{B3} = \frac{qa^3}{2}$

五、答案

(1) $F_d = k\Delta_d = P(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{St}}})$

$\Delta_{st} = \frac{8Pl^3}{3EI}$, $I = \frac{bh^3}{12}$, $F_d = 3P$

$M_C = 3Pl, \varepsilon_0 = \frac{M}{W_z E} = \frac{18pl}{bh^3 E} \Rightarrow P = \frac{\varepsilon_0 bh^2 E}{18l}$

(2) $\sigma_{dmax} = \frac{6Pl}{W_z} = 2E\varepsilon_0$

(3) $\delta_{cd} = \frac{F_d \cdot l^2}{6EI}(l - 6l) = -\frac{5F_d l^3}{6EI} = -\frac{5Pl^3}{2EI}$

六、答案

$\mu = 1$,

$i_{AB} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{64\pi d^2}} = \frac{d}{4}$

$\lambda_{AB} = \frac{\mu l}{i} = 83$

$\therefore \lambda_s < \lambda_{AB} < \lambda_P$，AB 杆为中柔度杆。

同理可得：$\lambda_{AC} = 80\sqrt{3} > \lambda_P$

AC 杆为细长杆。

$F_{cr1} = (304 - 1.12\lambda_{AB}) \times A = 95255N$

$F_{cr2} = \frac{\pi^2 EI}{l_2^2} = 47244N$

(2) $F_{AB} = 17300N < F_{cr1}$，$F_{AC} = 10000N < F_{cr2}$ 较稳定

(3)由题意知：

$\frac{F_{cr1}}{F_{cr2}} = \cot\theta$，$\therefore \theta = \text{arc cot}\frac{F_{cr1}}{F_{cr2}} = \text{arc cot}2$

华中科技大学 2006 年招收硕士研究生入学考试试题解析

一、填空题

1. 连续，各向同性，小变形
2. 断裂，强度极限，强度储备
3. 强度，稳定性，降低材料的消耗量
4. 屈服阶段，强化阶段，局部变形阶段，局部变形
5. 1∶1
6. $\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$，$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$
7. EA，弯曲刚度，GI_p
8. 最大拉应变，最大切应力

二、简答题答案

1.

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$　　$\sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$　　$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$　　$\sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$　　$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$

$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$　　$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$　　$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$

2. 当横截面积相等时，$W_{p圆环} \geqslant W_{p圆}$

又因为 $\tau_{max} = \frac{T}{W_p}$

所以 $\tau_{max圆环} \leqslant \tau_{max圆}$ 因此选用圆环比较优越。

3. 杆件基本变形形式：轴向拉压，弯曲，扭转

组合变形就是一结构同时受到弯拉(压)或弯扭作用时而发生的变形形式，如机械设备中的传动轴和曲柄轴。

4. $\frac{dM}{dx}=Q,\frac{dQ}{dx}=q$

5. 轴力拉为正，压为负；在所切横截面内侧切取微段，凡企图使该微段沿顺时针方向转动的剪力为正，使弯曲呈凹形的弯矩为正；矢量方向(右手定则)与横截面外法线方向一致的扭矩为正，否则为负。

6. 假如有一含圆孔的受拉薄板，圆孔处截面上的最大应力会显著超过该截面的平均应力，这种截面急剧变化引起的应力局部增大现象称为应力集中。对脆性材料的影响很大。

7. 答：如果未知量的个数多于独立的平衡方程的个数，这时未知量不能或不能全部用平衡方程求出唯一解，这类问题称为超静定问题，有几个多余的约束数就具有几次超静定次数。求解方法包括力法和位移法。

步骤：

(1)解除多余约束，以相应的多未示知力代替，得原结构的相当系统；

(2)利用相当系统的静力平衡方程和变形协调余件建立用载荷与多余未知力表示的补充方程；

(3)以补充方程确定多余未知力并通过相当系统计算原静不定结构的内力、应力和位移。

8. 答：平面弯曲：梁在变形后，横截面仍保持平面，且仍与纵线正交的一种弯曲形式；纯弯曲：若梁的某一段横截面上的剪力 Q 等于零，只有弯矩 M 不为零，称此段梁为纯弯曲，纯弯曲段梁的弯矩为常数；横力弯曲：梁的横截面上同时有弯矩和剪力，称为横力弯曲，横力弯曲梁弯曲变形后截面发生翘曲，不再满足平面假设。

三、计算题

1. 答案

∵ AB 杆为刚性杆

$\therefore \frac{\Delta_{CD}}{\Delta_{EF}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{2F_{CD}l_{CD}}{EA}=\frac{F_{EF}l_{EF}}{EA} \quad \therefore F_{EF}=2F_{CD}$ ①

又有平衡条件可得：

$P\cdot 3a=F_{CD}\cdot a+F_{EF}\cdot 2a$ ②

联立①、②得：

$F_{CD}=30\text{kN},F_{EF}=60\text{kN}$

$\therefore \sigma_{CD}=\frac{F_{CD}}{A}=30\text{MPa},\sigma_{EF}=\frac{F_{EF}}{A}=60\text{MPa}$

2. 答案

挠度曲线微分方程：$EIy''=-M(x)=-Py$

引用记号：$k^2=\frac{P}{EI}$，得：$y''+k^2y=0$

其通解为：$y=A\sin kx+B\cos kx$，式中 A、B 为常数。

杆的边界条件：$\begin{cases}x=0 & y=0\\ x=L & y=0\end{cases}$

代入通解得：$\begin{cases}B=0\\ A\sin kL=0\Rightarrow \sin kL=0\end{cases}$

$kL=\sqrt{\dfrac{P}{EI}}L=n\pi \qquad (n=0,1,2\cdots)$

$P=\dfrac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad (n=0,1,2\cdots)$

临界力为最小压力：$P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$— 欧拉公式

3. 答案

如图在B端附加一个力 F_B，则固定端反力为 $f=ql+F_B$，则

$M(x)=(ql+F_B)x-\dfrac{qx^2}{2}$

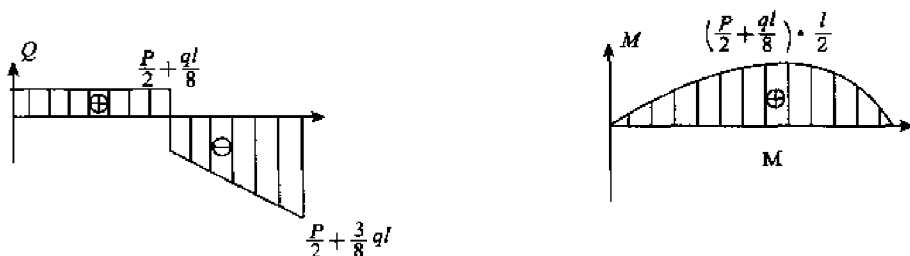
$\dfrac{\partial M(x)}{\partial F_B}=x$

$\omega_B=\int_0^L \dfrac{M(x)}{EI}\cdot\dfrac{\partial M(x)}{\partial F_B}dx$

令 $F_B=0$ 可得：$\omega_B=\dfrac{5ql^4}{24}$

4. 答案

如图所示：



用卡氏第二定理：

AC 段，$M_1(x)=\dfrac{Px}{2}+\dfrac{qlx}{8}$

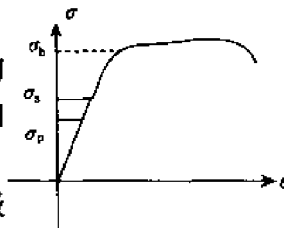
CB 段，$M_2(x)=-\dfrac{Px}{2}+\dfrac{5qlx}{8}+\dfrac{PL}{2}-\dfrac{qx^2}{2}-\dfrac{ql^2}{8}$

$\therefore f_c=\int \dfrac{l}{2}\dfrac{M_1(x)}{EI}\cdot\dfrac{\partial M_1(x)}{\partial P}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\dfrac{M_2(x)}{EI}\cdot\dfrac{\partial M_2(x)}{\partial P}dx=-\dfrac{Pl^3}{48EI}-\dfrac{5ql^4}{384}$

同理，用卡氏第二定理可得：$\theta_A=-\dfrac{5pl^2}{24}-\dfrac{7ql^3}{48}$

浙江大学 2006 年研究生入学考试试题解析

一、(30 分)



(1)答案：材料力学对研究对象做了三个基本假设：连续性假设、均匀性假设、各向同性假设。在考察梁弯曲时又增添了弯曲平面假设和单向受力假设；计算轴扭转时增添了平面假设。

(2)实验曲线如图所示。在曲线上，σ_p 表示比例极限，σ_s 表示屈服极

限，σ_b 表示极限强度。

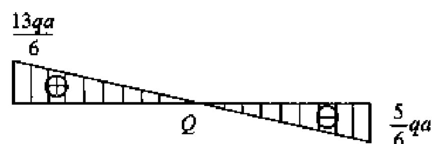
曲线共分为四段：线性阶段，屈服阶段，硬化阶段，缩颈阶段。

还可以得到的参数是，材料的弹性模量 E(即为直线斜率)，伸长率 δ，断面收缩率 ψ。

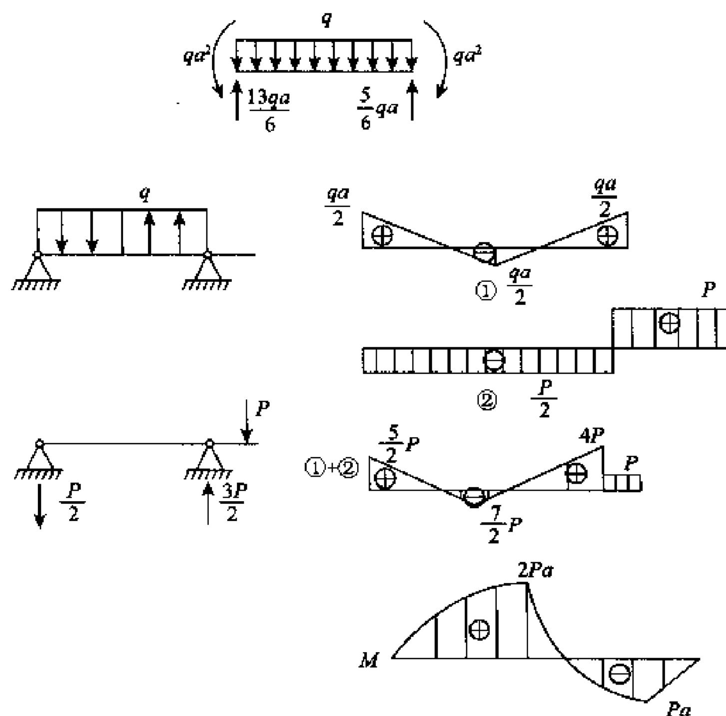
二、(30 分)

答案：如图所示

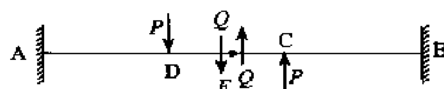
(1)



(2)

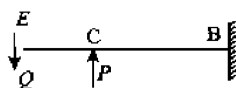


三、答案：



由对称性知铰支处反力为 P

结构化为右图所示列式



在 P 作用下　$\Delta_{CP}=\dfrac{pa^3}{3EI}$

在 Q 作用下　$\Delta_{CQ}=\dfrac{7Qa^3}{12EI}$

变形协调　$\Delta_{CP} = \Delta_{cd}$ 则 $Q = \frac{4P}{7}$

$\therefore F_{AN} = \frac{3}{7}P(\uparrow)$　$M_A = \frac{Pa}{7}(\nwarrow)$

四、答案:

对于图示应力状态,已知 σ_z 为主应力,其他两个主应力可由 $\sigma_x, \tau_x, \sigma_y$ 求出。

由公式 $\left.\begin{matrix}\sigma' \\ \sigma''\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} (\sigma' \geqslant \sigma'')$ 可得:

$\sigma' = 110\text{MPa}, \sigma'' = 10\text{MPa}$

$\therefore \sigma_1 = 110\text{MPa}, \sigma_2 = 50\text{MPa}, \sigma_3 = 10\text{MPa}$

(2) $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50\text{MPa}$

(3) $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon'''_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 4.6 \times 10^{-4}$

同理: $\varepsilon_2 = 7 \times 10^{-5}, \varepsilon_3 = -1.9 \times 10^{-4}$

(4) $\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 3.4 \times 10^{-4}$ 或 $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3.4 \times 10^{-4}$

$\sigma_{r1} = \sigma_1 = 110\text{MPa}$

$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 92\text{MPa}$

(5) $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 100\text{MPa}$

$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = 87\text{MPa}$

五、答案

设 CD 杆受力为 F_C,由平衡方程 $P \cdot \frac{L}{2} + 2P \cdot 2L = F_C \cdot L$ 得: $F_C = \frac{9}{2}P$

稳定性校核: $F_{Cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, $F_C \leqslant \frac{F_{cr}}{n}$,

$\therefore P \leqslant \frac{2F_{cr}}{27} = 7381\text{N}$

强度校核:由弯矩图可知:杆 AB 上最大弯矩为 $M_{max} = 2PL$

$W_z = \frac{a^3}{6}$, $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{12pL}{a^3} \leqslant \frac{[\sigma]}{n}$

$P \leqslant \frac{a^3[\sigma]}{12Ln} = 711\text{N}$

综上所述: $P \leqslant 711\text{N}$

参考答案

第1章

一、简答题

答:构件的强度、刚度和稳定性问题

二、填空题

1. 连续性、均匀性、各向同性;

2. 强度、刚度和稳定性

三、选择题

1. C;2. D

第2章

一、简答题

出现屈服现象,在光滑试件表面出现与轴线成45°的滑移线

二、填空题

1. 减小、减小;

2. 横截面、45°斜截面;

3. 塑性;

4. F_3;

5. 切应力在剪切面上均匀分布;

6. 扭转试验;

7. 同时发生压缩和挤压破坏;

8. $4(a+b)F/(a\pi d2)$

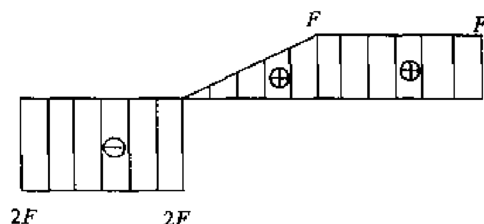
三、选择题

1. C;2. D;3. D;4. C;5. C;6. A

四、判断题

1. ×;2、√;3、√

五、作图题



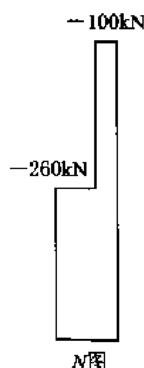
六、计算题

1. (1)$\therefore N_{AB}=\sqrt{2}P$(拉),$N_{AC}=P$(压)。

(2) $\delta_{Ay} = \frac{pl}{EA}(1+2\sqrt{2})$

2. 柱的压缩量为：$\Delta L = \frac{PL}{3EA}$

3. (1)如图所示；



N图

(2)AC段应力：-2.5MPa；

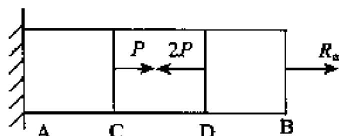
CB段应力：-6.5MPa；

(3)AC段线应变：-2.5×10^{-6}m；

CB段线应变：-6.5×10^{-6}m；

(4)总变形：-1.35×10^{-5}m

4. 轴力图如图所示：



应变能：$U = \frac{P^2a}{EA}$

5. (1)[P]=10kN；位移：0.12mm；

(2)0.625m；[P]=16kN

6. 2.96cm

7. 82.1 MPa

第3章

一、简答题

1. 答：实心轴的最大剪切应力要大一些；

二、填空题

1. $2\sqrt{2}M_e$；

2. $\frac{\varphi dG}{2l}$；

3. 变形几何关系和物理关系；

4. $15/32\pi d^3$

5. $I_P = I_P(D) - I_P(d)$,

$W_t \neq W_t(D) - W_t(d)$；

6. 8 和 16。

三、选择题

1. A;2. B;3. A;4. A;5. C

四、判断题

1. √;2. √;3. √

五、计算题

1. 37.2MPa

2. 16.4MPa

3. $d=0.134\text{m}$

4. $I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0.886 : 0.720$

第 4 章

一、填空题

1. 叠加法

2. 受拉

3. 主惯性

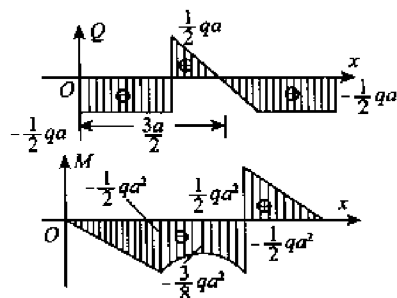
二、选择题

1. C;2. B;3. A;4. D;5. C

三、作图题

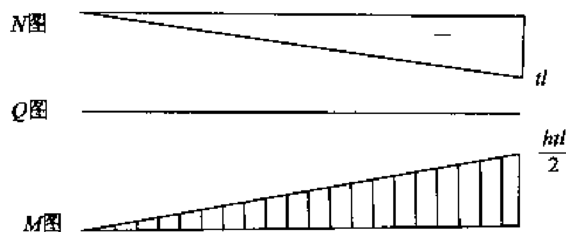
1. 略

2. 剪力图和弯矩图如图所示:

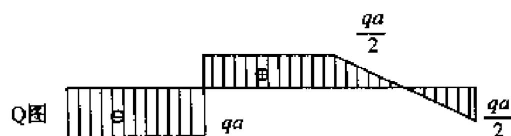


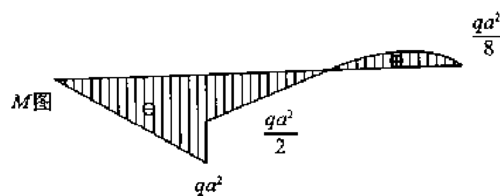
3. $x=(2l-a)/4$

4. 轴力、剪力和弯矩图如图所示:



5. 剪力图和弯矩图如图所示:





第 5 章

一、填空题

1. 物理、静力学；

2. 线性、在距离中性轴最远；

3. 边界、连续性；

4. $I_{z2}=\frac{bh^3}{12}$；

5. 梁的纵向对称面与横截面的交线；

6. 8；

7. 作用面过弯曲中心且平行于形心主惯性平面；

二、选择题

1. D；2. C；3. D；4. C；5. B；6. C；7. A；8. A

三、判断题

1. √；2. √；3. ×；4. √；5. √；6. √

四、计算题

1. (1) $[P]=25\text{kN}$

(2)a 放置合理

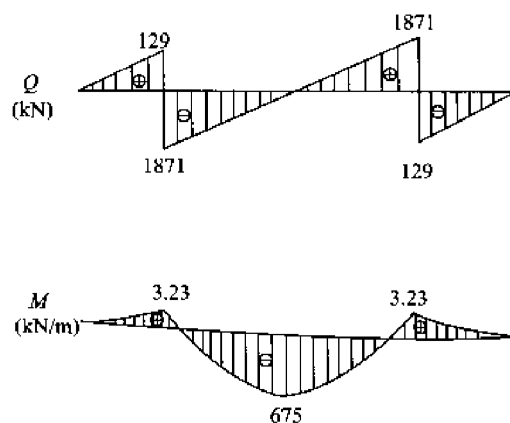
2. $x=6-3\sqrt{2}\approx 1.7574$

B 左截面上剪力最大

$Q_{max}=-46.2754\text{kN}$

$\tau_{max}=-21.3\text{MPa}$

3. (1)剪力图和弯矩如图所示



(2) $\sigma_{max}=216.0\text{MPa}$，$\tau_{max}=37.4\text{MPa}$

4. (1)$b=0.57735D$；$h=0.8165D$

(2)$b=0.5D$；$h=0.866D$

5. $b=12.8\text{cm}$;$h=25.6\text{cm}$

6. 螺栓的直径应选 25mm

第 6 章

一、填空题

1. $x=0,y_1=0$;

$x=a+b,y_2=-Pa/[k(a+b)]$

$x=a,y_1=y_2$

$x=a,\theta_1=\theta_2$

2. 0.006rad,逆时针方向;

3. $n^2:1$

4. 1/7;

5. 铰支,均布载荷;

6. 线弹性小变形。

二、选择题

1. B;2. C;3. B;4. D;5. C;6. B;7. B

三、判断题

1. ×;2. ×;3. √;4. √

四、计算题

1. B点挠度:$\frac{qa^3}{24EI}(4l-a)$ 向下

B点转角:$\frac{qa^3}{6EI}$ 顺时针

2. B点水平位移:$-\frac{qL^2}{Ebh}$ (←)

C点水平位移:$\frac{2qL^2}{Ebh}$ (→)

3. $y_B=\frac{\varepsilon_c L^2}{h}$ (↓)

4. $y_D=-\frac{Pa^3}{3EI}$

5. $\sigma_1:\sigma_2=h_1:h_2$

第 7 章

一、简答题

答:笔尖折断,是由于拉应力的作用。在写字时,笔尖受弯,而笔尖是脆性材料,在受拉一侧达到极限应力,笔尖发生脆性断裂;

二、填空题

1. 小变形,线弹性范围;

2. 平面应力状态;

3. 找出一点在不同方向截面上的应力变化规律;

4. $-\frac{\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$, $\frac{(1+\mu)}{E}\sigma_1$

5. 等于

6. 脆性

7. 纯剪

三、选择题

1. A;2. A;3. C ;4. C;5. A;6. D;7. C;8. C

四、判断题

1. × ;2. √ ;3. √

五、计算题

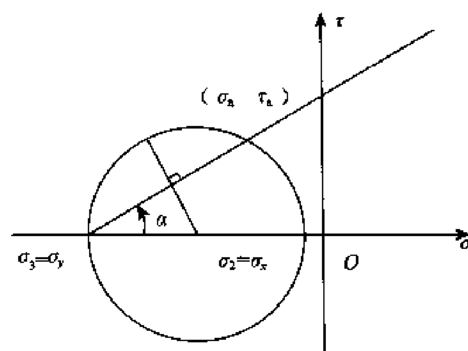
1. $\sigma'=1300\text{MPa}$,$\sigma''=300\text{MPa}$

$\tau_{max}=800\text{MPa}$

2. $\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=140\text{MPa}\leqslant[\sigma]$

强度满足要求,简体安全

3. 在σ轴上定出σ_y,作α角定出σ_α, τ_α,得到的应力圆如图:



4. T=125.6 (N·m)

5. σ =19.9Mpa, τ = 4.99MPa

第8章

一、填空题

1. 小变形,线弹性范围;

二、选择题

1. B;2. D;3. D ;4. B;5. D;6. D;7. D;8. D

三、判断题

1. × ;2. ×

四、计算题

1. $\sigma_{max}=15.29\text{MPa}$

$f=30.8\text{mm}$

2. $\sigma_{r3}=84.2\text{MPa}<[\sigma]$

3. $P=4142\times10^5\varepsilon_1$

第 9 章

一、填空题

1. 结构在荷载作用下的弯矩；

2. $y_{B1} + y_{B2}$

二、选择题

1. B；2. C；3. C ；4. C；5. C；6. B；7. A；

三、计算题

1. $\Delta = \frac{3\pi PR^3}{EI}$

2. C 点挠度：$\delta_c = \frac{4PL^3}{243EI} + \frac{P}{9K}$

3. $\theta_1 = 0.015(\text{rad})$

4. $y_B = \frac{5Pl^3}{384EI}$，$\theta_B = \frac{Pl^2}{12EI}$

5. $R_B = \frac{P}{2} \times \frac{a^2}{l^3}(3l - a)$

6. $y_B = PR^3\left[\frac{0.785}{EI} + \frac{0.356}{GI_P}\right]$

7. $\Delta_A = \frac{Ph^2}{2EI}\left(\frac{h}{3} + a\right)$

8. $\delta \approx \frac{PL^3}{48E\pi r_0^3 t}\left(1 + \frac{6\alpha_s E r_0^2}{GL^2}\right)$

α_s 为截面系数，对薄壁圆环 $\alpha_s = 2$

第 10 章

一、填空题

1. 多余未知力和荷载的；去掉多余约束、原结构中相应的位移；

2. $\triangle l_{Bd}(T) - \Delta l_{BD}(N) = f_B$，

$\alpha_{Tl} - \frac{Nl}{EA} = \frac{N(2l)^3}{48EI}$

3. 在静定基上单位力偶 X_1 单独作用在 A 点时 A 点沿 X_1 方向的转角；在静定基上载荷 P 作用下 A 点沿 X_1 方向的转角。

二、选择题

1. C；2. B；3. D

三、计算题

1. $M_A = \frac{ql^2}{8}$

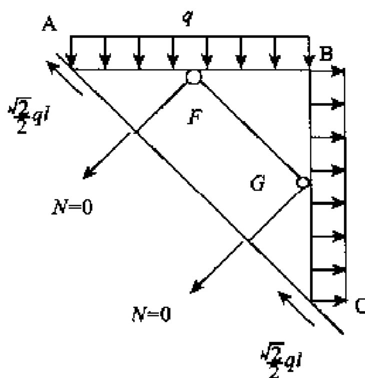
2. $M_{max} = M_A = \frac{5Pa}{6}$

3. $F_{NAB} = \frac{ql}{2}$，$F_{SAB} = \frac{ql}{2} - qx$

$M_{AB} = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$;

$F_{NCB} = -\frac{ql}{2}, M_{CB} = -\frac{ql}{2}x_1 + \frac{q}{2}x_1{}^2$,

$F_{SCB} = \frac{ql}{2} - qx_1$



4. f_D=0.0199mm

5. f_A=4.86mm

6. 0.2964PR

第 11 章

一、填空题

1. 3Q

2. 4QL/9

3. 不相等

二、选择题

1. A ;2. D;3. C;4. C;5. D;6. B;7. B

三、判断题

1. ×

四、计算题

1. 梁内最大冲击应力:

$\sigma_d = 144MPa$

2. $\sigma_{dmax} = \sqrt{\frac{v^2}{g\left[\frac{Q}{K} + \frac{Qa^3}{3EI}\right]}}\frac{Qa}{W}$

3. 工作安全系数为 1.15

4. 点 1: $n_\sigma = 2.77$

点 2: $n_\sigma = 2.46$

点 3: $n_\sigma = 12.9$

点 4: $n_\sigma = 4.89$

5. $\sigma_{dmax} = 107.2MPa$

6. 梁: $\Delta\sigma_{max} = 15.64MPa$

吊索：$\Delta\sigma'_{max}=2.55\text{MPa}$

第 12 章

一、简答题

答：疲劳破坏是指交变应力作用下最大工作应力低于屈服强度且不产生明显塑性变形的骤然断裂；

二、填空题

1. 构件形状，构件尺寸影响，构件表面质量影响；

2. 缓和应力集中；减小表面粗糙度；增加表层强度；

三、选择题

1. A；2. B；3. D

四、计算题

1) $\sigma_m=30\text{MPa}$，$\sigma_a=30\text{MPa}$，

$r=0$；

2) $\sigma_m=50\text{MPa}$，$\sigma_a=10\text{MPa}$，

$r=40/60=0.667$；

3) $\sigma_m=20\text{MPa}$，$\sigma_a=60\text{MPa}$，

$r=-40/80=-0.5$；

4) $\sigma_m=0\text{MPa}$，$\sigma_a=80\text{MPa}$，

$r=-80/80=-1$

第 13 章

一、填空题

稳定平衡、不稳定平衡；

二、选择题

1. C；2. D；3. B；4. C；5. D

三、判断题

√

四、计算题

1. 结构临界载荷：$P_{cr}=531.7\text{kN}$

2. $[F]\leqslant 51.5\text{kN}$

3. 工作安全系数 $n=3.2>n_{st}=3$

   结构安全

4. 直杆稳定

5. 167kN

参考文献

1　孙训方，方孝淑，关来泰．材料力学（第 4 版）．高等教育出版社，1982-1

2　刘鸿文．材料力学（第 4 版）．高等教育出版社，2004-1

3　张新占．材料力学．西北工业大学出版社，2005-2

4　蔡乾煌等．材料力学精要与典型例题讲解．清华大学出版社，2004-5

5　单辉祖．材料力学（第 2 版）．高等教育出版社，2004-7

6　范钦珊．材料力学（第 2 版）．高等教育出版社，2005-7

7　申向东．材料力学．中国水利水电出版社，2005-7

8　荀文选．材料力学．科学出版社，2005-8

9　赵诒枢，吴胜军，尹长城．材料力学习题详解．华中理工大学出版社，2004-9

10　范钦珊．材料力学学习指导．清华大学出版社，2005-12

11　荀文选．材料力学典型题解析及自测试题．西北工业大学出版社，2004-3

12　刘鸿文．简明材料力学．高等教育出版社，2003-5

13　邱棣华编．材料力学．高等教育出版社，2004-8

14　闵行．材料力学．西安交通大学出版社，1999-9

15　孙国钧，赵社戌．材料力学．上海交通大学出版社，2006

研究生入学考试辅导
本科生过关测试必备
高等院校教材同步辅导

http://www.phei.com.cn



理论概要
例题详解
习题自测
考研真题

材料力学

考研辅导

海　欣　主编
温　正　唐家鹏　编著



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

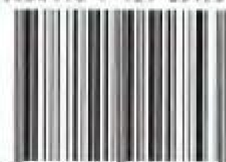
上架建议：考研辅导/材料力学
咨询投稿电话：(010) 88254010
电子信箱：gp@phei.com.cn



责任编辑：范子瑜　钟永刚
封面设计：孙焱津



ISBN 978-7-121-05175-3



9 787121 051753 >

定价：32.00 元